



# Equation d'Euler tronquée: de la dynamique des singularités complexes à la relaxation turbulente.

Cyril Cichowlas

## ► To cite this version:

Cyril Cichowlas. Equation d'Euler tronquée: de la dynamique des singularités complexes à la relaxation turbulente.. Analyse de données, Statistiques et Probabilités [physics.data-an]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2005. Français. NNT: . tel-00070819

**HAL Id: tel-00070819**

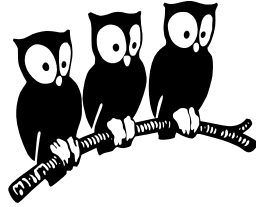
**<https://theses.hal.science/tel-00070819>**

Submitted on 20 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École normale supérieure  
Département de Physique  
Laboratoire de Physique Statistique



Thèse de doctorat de l'université Paris VI



présentée par

**Cyril Cichowlas**

pour obtenir le titre de Docteur de l'Université Paris VI

Spécialité : Physique théorique des Liquides

---

# **Équation d'Euler tronquée : de la dynamique des singularités complexes à la relaxation turbulente.**

---

soutenue le 29 Septembre 2005

devant le jury composé de :

M. Marc-Etienne Brachet	.....	Directeur
M. Fabrice Debbauch	.....	Co-directeur
M. Uriel Frisch	.....	Examineur
M. Michel Moreau	.....	Président
M. Alain Noullez	.....	Examineur
Mme. Laurette Tuckerman	.....	Rapporteur
M. Massimo Vergassola	.....	Rapporteur



# Remerciements

Mon travail de thèse s'est déroulé de Septembre 2001 à Septembre 2005 au Laboratoire de Physique Statistique du département de Physique de l'Ecole Normale Supérieure. Ce laboratoire très dynamique permet d'excellentes conditions de travail. Je tiens à remercier son directeur Jacques Meunier et son suppléant Yves Couder pour m'y avoir accueilli.

Ces remerciements vont aussi à l'ensemble des membres du jury, Uriel Frisch, Michel Moreau qui a bien voulu en accepter la présidence, Alain Noullez, Laurette Thuckerman et Massimo Vergassola auxquels je suis reconnaissant de l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux, et du soin avec lequel ils ont lu le présent manuscrit. Je suis particulièrement redevable à Uriel Frisch du soutien et des lumières qu'il a su apporter sur les résultats surprenants présentés ici.

Ce travail de thèse a été dirigé par Marc Brachet. Avant de débiter cette thèse, Marc a été mon directeur de stage de D.E.A., stage au cours duquel j'ai pu découvrir ses qualités, aussi bien au niveau scientifique, que pédagogique et humain. Sa patience, son enthousiasme, son ouverture et son investissement sur les différents travaux que nous avons entrepris depuis ont fait de lui un interlocuteur passionnant. A son contact, j'ai appris beaucoup scientifiquement (des simulations numériques aux subtilités théoriques de la physique statistique et de la turbulence), mais également humainement, tant son absence de préjugés a su libérer ma pensée. Il ne faudrait pas oublier de mentionner sa disponibilité, la grande liberté qu'il a su me donner et l'écoute dont il a fait preuve à tout niveau pendant ce travail. Pour tout cela, je le remercie. Et aussi, je voudrais le remercier pour m'avoir donné la chance de travailler sur le sujet surprenant de la relaxation des équations d'Euler spectralement tronquées, qui s'est révélé très riche. Un jour, il m'a demandé nonchalamment de poursuivre une de nos simulations loin de sa limite de validité. Les spectres d'énergie devenaient croissant à grand nombre d'onde. L'hypothèse d'erreur numérique me traversait l'esprit, mais il m'a demandé de mesurer la pente : en  $k^2$  ! "J'en étais sûr !" l'entends-je encore s'écrier. "J'ai besoin d'une cigarette" ajouta-t-il. Il ne restait plus qu'à comprendre... le travail commençait : un travail passionnant au cours duquel j'ai beaucoup appris en physique et sur moi-même. Et j'ai beaucoup appris à arrêter de fumer également.

C'est à l'occasion de ce travail que nous avons collaboré avec Fabrice Debbsch qui a co-encadré mon travail de thèse. J'ai également beaucoup appris à son contact, à tout niveau. Sa patience, son écoute, ses qualités pédagogiques, sa rigueur, et sa créativité ont largement contribué à l'élaboration des résultats scientifiques et à la rédaction de ce manuscrit. Pour cela et pour son soutien constant, je le remercie. L'équipe de travail que Marc et Fabrice constituaient a été très stimulante : j'ai été très impressionné par leur culture qui m'a souvent dépassé, tant leurs domaines d'intérêt et de recherche sont variés, et qui a rendu nos échanges d'autant plus

riches de mon point de vue. Leur tact et leur attention ont su conduire la croisade de ce travail de recherche, et j'ai pris un plaisir considérable à construire cette aventure aux cotés de tels personnages, qu'aucune littérature ne saurait envisager. Des personnages ! Et j'ai eu la chance de les rencontrer.

En Mai 2004, Pauline Bonaïti nous a rejoint pour quelques mois lors de son stage de Maitrise. La rigueur de son travail a soulevé d'importantes questions, et les méthodes qu'elle a développé avec Marc Brachet pour les résoudre ont été fort utiles dans nos travaux ultérieurs. Son engouement et son abnégation ont fait de cette collaboration un excellent souvenir également.

Je remercie Olivier Cadot et Jean-Hugues Titon, avec lesquels j'ai eu la chance d'interagir, d'abord lors de mon stage de D.E.A., puis pendant la première année de ma thèse. Les résultats présentés dans ce manuscrit ne constituent pas un portrait fidèle de l'ensemble des travaux que j'ai accompli au cours de ma thèse. C'est en effet sur les statistiques des grandeurs globales en turbulence entretenue que mon travail sous la direction de Marc Brachet a débuté, et les expérimentations dirigées par Olivier Cadot ont été au coeur de mes préoccupations pendant presque deux années. L'ensemble des simulations numériques réalisées à cette époque ont été l'objet de plusieurs présentations lors de colloques sur la Turbulence ou la Physique Statistique (dont on ne cessera de remercier les organisateurs). Mes remerciements vont aussi à ceux qui ont su éclairer de leurs brillantes lumières ces résultats : d'abord à Stéphane Fauve pour son intérêt constant et la vaste connaissance du sujet qu'il nous a fait partagé ; mais aussi à Alain Noullez et Caroline Nore pour leur vif intérêt et leurs précieux conseils. Toutefois, nous n'avons pas publié sur ce sujet : les surprenants résultats que nous présentons dans ce manuscrit ont requis un investissement total qui nous a conduit au douloureux choix de mettre ces premiers travaux en attente, et, en raison du temps limité qui est impartit lors d'une thèse, à ne pas les inclure au présent manuscrit.

Durant ma thèse, j'ai sollicité les services techniques et administratifs du département et du laboratoire. Je tiens à les remercier pour l'accueil qu'ils m'ont réservé et pour leur aide précieuse. Je remercie donc Alain Launay, Daniel Lemoal, Régine André, Marie-Françoise Duclos, Anne-France Seyer, Carole Philippe, Nora Sadaoui et plus particulièrement Zaïre Dissi. Une large partie des simulations que j'ai réalisé lors de cette thèse ont été réalisées sur la machine Nec SX 5 de l'IDRIS, et je voudrais remercier également cette institut ainsi que ses services techniques et administratifs pour leur aide et leur accueil.

Merci enfin à l'ensemble des thésards que j'ai pu cotoyer dans le bureau DC21 : Eric Sultan pour son perpétuel intérêt pour mon travail, Chi Tuong Pham pour ses experts conseils informatiques, et tous les autres, Christophe Mora, Camille Enaud, Paul François, pour les nombreux échanges que nous avons eu à propos de notre travail de chercheur, mais aussi de nos expériences d'enseignants. Merci également à Vincent Bretin, Stéphane Ghazzi, Etienne Larsabal, Laurent Montagnon, Alexandre Paci et Pierre Vanhaecke pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail, notamment dans ses phases les plus critiques, pour leur écoute et aussi pour leur soutien.

Il ne me reste qu'à remercier sincèrement celles qui m'ont aidé, sans pour autant connaître la physique, qui ont dépassé mes attitudes singulièrement complexes, et ont su encourager une relaxation même turbulente... ma mère en tête.

# Table des matières

<b>Présentation générale</b>	<b>9</b>
<hr/>	
<b>1 Dynamique des singularités complexes de l'équation d'Euler</b>	<b>13</b>
1.1 Approche numérique . . . . .	14
1.2 Évolution des spectres d'énergie . . . . .	14
1.3 Interférences de singularités complexes . . . . .	17
1.4 Discussions . . . . .	20
<b>2 Séparation spontanée d'échelles et Turbulence</b>	<b>21</b>
2.1 Évolution temporelle des spectres d'énergie . . . . .	22
2.1.1 Apparition d'une zone thermalisée en $k^2$ . . . . .	22
2.1.2 Influence de la troncature . . . . .	24
2.2 Dissipation d'énergie par thermalisation . . . . .	25
2.2.1 Caractérisation du bain thermique . . . . .	25
2.2.2 Puissance dissipée et loi de Kolmogorov . . . . .	27
<b>3 Relaxation et relation de Fluctuation-Dissipation</b>	<b>31</b>
3.1 Équation et théorème de Liouville . . . . .	31
3.2 Équilibres absolus . . . . .	32
3.3 Fluctuation-Dissipation dans le cadre hamiltonien . . . . .	35
3.3.1 Démonstration générale . . . . .	35
3.3.2 Modèle de l'oscillateur . . . . .	37
3.3.3 Cas des équilibres absolus . . . . .	40
3.3.4 Discussion . . . . .	42
<b>4 Calcul et estimation des temps de dé-corrélation</b>	<b>43</b>
4.1 Équation de Burgers inviscide unidimensionnelle . . . . .	44
4.1.1 Étude des fonctions de corrélation . . . . .	44
4.1.2 Calcul analytique des temps de corrélation . . . . .	47
4.1.3 Discussion . . . . .	49
4.2 Équation d'Euler tridimensionnelle incompressible . . . . .	51
4.2.1 Calcul analytique des temps de corrélation . . . . .	51
4.2.2 Mesure du temps de décorrélation . . . . .	53
4.2.3 Discussion . . . . .	60

<b>5</b>	<b>Échelle dissipative turbulente</b>	<b>63</b>
5.1	Estimation de l'échelle dissipative . . . . .	63
5.2	Discussion et validité des lois d'échelle . . . . .	67
5.3	Perspectives . . . . .	70

	<b>Conclusion générale</b>	<b>71</b>
--	----------------------------	-----------

---

	<b>Annexe : Méthodes Numériques</b>	<b>75</b>
--	-------------------------------------	-----------

<b>6</b>	<b>Méthodes numériques</b>	<b>75</b>
6.1	Généralités sur les méthodes spectrales . . . . .	75
6.1.1	Représentation d'une fonction . . . . .	75
6.1.2	Convergence des méthodes spectrales . . . . .	76
6.1.3	Approximation d'une EDP par méthode pseudo-spectrale . . . . .	77
6.1.4	Application à l'équation de Navier-Stokes . . . . .	80
6.2	Schémas temporels . . . . .	81
6.2.1	Euler implicite explicite . . . . .	81
6.2.2	Instabilités . . . . .	81
6.2.3	Runge Kutta d'ordre 4 . . . . .	82
6.3	Symétries du Taylor Green et optimisation du code . . . . .	83
6.4	Méthode Monte Carlo . . . . .	84
6.4.1	Générateur de nombre aléatoire . . . . .	84
6.4.2	Génération de conditions initiales aléatoires . . . . .	84
<b>7</b>	<b>Articles publiés</b>	<b>85</b>

	<b>Bibliographie</b>	<b>111</b>
--	----------------------	------------

# Table des figures

1.1	Évolution temporelle des spectres d'énergie. <b>Gauche</b> : écoulement TG. <b>Droite</b> : écoulement KP. . . . .	15
1.2	Évolution temporelle du décrement $\delta$ et de la puissance $n$ . <b>Gauche</b> : écoulement TG. <b>Droite</b> : écoulement KP. . . . .	16
1.3	Oscillations des spectres d'énergie de l'écoulement KP. <b>Gauche</b> : ajustement des oscillations spectrales. <b>Droite</b> : évolution temporelle du décrement corrigé. . . .	17
1.4	Évolution temporelle des paramètres ajustés sur les spectres d'énergie de l'écoulement KP. <b>Gauche</b> : correction du décrement $\delta$ et du préfacteur $n$ . <b>Droite</b> : amplitude $a$ et paramètre de séparation $\delta_i$ caractérisant les oscillations. . . . .	18
1.5	Comparaison des 3 formes d'ajustement des spectres d'énergie de l'écoulement KP. <b>Gauche</b> : erreur quadratique $\chi^2$ , normalisée. <b>Droite</b> : amplitudes $a$ des oscillations. . . . .	19
2.1	Évolution temporelle du spectre d'énergie du Taylor-Green. . . . .	23
2.2	Évolution temporelle du champs de vitesse et du spectre d'énergie de l'équation de Burgers 1D de condition initiale $u_0 = \sin(2x)$ . . . . .	23
2.3	Spectres d'énergie du Taylor-Green à $t = 8$ pour différentes résolutions. . . . .	24
2.4	Évolution temporelle de la séparation d'échelle $k_{th}$ (à gauche), et de l'énergie thermique $E_{th}$ . . . . .	25
2.5	<b>Gauche</b> : évolution temporelle de la température $T$ . <b>Droite</b> : énergie du bain thermique $E_{th}$ en fonction de la température $T$ . . . . .	26
2.6	Évolution temporelle de la puissance $\varepsilon$ dissipée vers le bain thermique (à gauche), et de $\varepsilon^{-1/3}$ (à droite). . . . .	28
2.7	Spectres d'énergie du Taylor-Green à $t = 8$ (à gauche), et évolution temporelle du coefficient $n$ de l'ajustement des spectres par l'équation (2.10) (à droite). . . .	28
2.8	Évolution temporelle du rapport $k_{th}/k_m$ . . . . .	29
3.1	Trajectoires de deux oscillateurs harmoniques (à gauche), et anharmoniques (à droite) dans l'espace des phases normalisé. . . . .	37
3.2	Fonction de corrélation $\Delta_{xy_0}$ entre position et impulsion pour l'oscillateur harmonique, et l'oscillateur anharmonique. . . . .	39
4.1	Fonctions de corrélation pour différents nombres d'onde $k$ . <b>Gauche</b> : en fonction du temps $t$ . <b>Droite</b> : en fonction du temps adimensionné $t/\tau_{1/2}$ . . . . .	44
4.2	Temps de corrélation mesuré $\tau_{1/2}$ (à gauche) et $k \tau_{1/2}$ (à droite) en fonction de $k$ . . . . .	45



4.3	Comparaison de deux lois d'échelle pour $\tau_{1/2}$ . <b>Gauche</b> : $\tau_{1/2} k\sqrt{T}$ en fonction de $k$ . <b>Droite</b> : $\tau_{1/2} k\sqrt{E}$ en fonction de $k$ . . . . .	46
4.4	Comparaison entre une fonction de corrélation et son interpolation parabolique issue du calcul analytique. . . . .	50
4.5	Décroissances parabolique et exponentielle des fonctions de corrélation en fonction du temps adimensionné $\tau = t/\tau_C^*$ . . . . .	54
4.6	Temps de corrélation $\tau_\Delta$ mesuré au voisinage de l'origine. . . . .	54
4.7	<b>Gauche</b> : rapport du temps de corrélation $\tau_H$ mesuré au voisinage de l'origine (de paramètre $H$ ) à la valeur théorique $\tau_C$ . <b>Droite</b> : même rapport ajusté de $\sqrt{2-2H}$ , pour obtenir $\Theta$ . . . . .	55
4.8	Mise en évidence d'une seconde loi d'échelle : rapport $\Theta$ en fonction de $k$ . . . . .	56
4.9	Mise en évidence de la qualité de l'ajustement (éq. 4.29) pour les queues exponentielles, et de ses défauts au voisinage de l'origine. . . . .	58
4.10	Mise en évidence de deux lois d'échelle différentes caractérisant la décrorelation. <b>Gauche</b> : rapport $\tau_p/\tau_C$ en fonction de $k/k_{max}$ . <b>Droite</b> : produit $\Pi_e = \tau_e k \sqrt{E_{th}}$ en fonction de $k/k_{max}$ . . . . .	59
4.11	Caractérisation de la loi d'échelle des temps de décroissance exponentielle des fonctions de corrélations. . . . .	60
4.12	Loi empirique finale $\tau_{sup}$ du temps de décrorelation en fonction de $k/k_{max}$ . . . . .	61
5.1	Loi de Kolmogorov et thermalisation partielle du spectre d'énergie. Mise en évidence d'un effet dissipatif creusant le spectre. . . . .	64
5.2	Évolution temporelle du rapport de $k_{th}$ aux échelles de dissipation estimées. <b>Gauche</b> : $k_d$ . <b>Droite</b> : $k_d^*$ . . . . .	65
5.3	Évolution temporelle du rapport des deux échelles estimées : $k_d^*/k_d$ . . . . .	66
5.4	Évolution temporelle du rapport des deux échelles estimées : $k_d^*/k_m$ . . . . .	67
5.5	<b>Gauche</b> : évolution temporelle des spectres d'énergie du Taylor-Green. <b>Droite</b> : superposition des mêmes spectres d'énergie par adimensionnement. . . . .	68
5.6	Loi de Kolmogorov sur les spectres d'énergie du Taylor-Green. . . . .	68
5.7	Spectre du flux d'énergie rapporté à la puissance dissipée $\varepsilon$ . <b>Gauche</b> : pour différents instants au voisinage du maximum de dissipation. <b>Droite</b> : moyenne temporelle. . . . .	69
5.8	Enstrophie $\Omega(t)$ et sa dérivée temporelle normalisée $S(t)$ (éq.(5.6)). <b>Gauche</b> : écoulement de TG. <b>Droite</b> : écoulement de KP. . . . .	72
5.9	Régularisation par les effets de la troncature des comportements de l'enstrophie $\Omega(t)$ (à gauche) et de sa dérivée temporelle normalisée $S(t)$ (à droite) pour l'écoulement de TG. . . . .	72
6.1	Vérification de la conservation de l'énergie au cours du temps pour les simulations de l'équation d'Euler tronquée de conditions initiales TG. . . . .	83

# Présentation générale

Depuis les années 1970 on utilise des simulations numériques spectrales des équations d'Euler et Navier-Stokes [1; 2] pour étudier la turbulence et la dynamique des singularités complexes. Depuis cette époque, la puissance des ordinateurs a considérablement augmenté : en 1972, Orszag effectue des simulations en  $32^3$  sur des équations d'Euler et de Navier-Stokes [2; 3]; en 1981 Siggia donne les premiers indices de filaments de vorticité à petite échelle en 3D [4]; en 1983, pour la première fois, on observe du  $k^{-5/3}$  en 3D en  $256^3$  (en déclin sur le vortex de Taylor-Green) [5]. Le vortex de Taylor-Green [6] a souvent été utilisé parce qu'il présente un certain nombre de symétries qui permettent un gain d'espace de stockage et de temps de calcul (voir annexe). Dans les années 90, les simulations montent à  $864^3$  sur le Taylor-Green [7], et comme elles permettent de mesurer en turbulence toutes les quantités souhaitées [8; 9] elles orientent certaines mesures expérimentales [10]; en 93, les simulations les plus poussées sont du  $512^3$  sans symétries sur des machines massivement parallélisées [11; 12]. Enfin en 2003 (pour références [13]), tandis que la machine ASC Q de Los Alamos permet d'atteindre des simulations en  $2048^3$  sans symétries [14], au Japon l'Earth simulator monte à  $4096^3$  sans symétries [15]. Dans cette thèse, nous effectuerons des simulations sur le vortex symétrique de Taylor-Green en déclin jusqu'en résolution  $2048^3$ , en utilisant la machine NEC SX-5 de l'IDRIS (*Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique*).

Les méthodes spectrales se prêtent bien à l'étude des singularités spatiales complexes car elles permettent d'effectuer une approximation d'un écoulement bien plus précise que les méthodes de différences finies. L'approximation considérée possède une limite de validité, ce qui se traduit dans la pratique par une limite en temps d'intégration de l'équation d'Euler. L'étude des singularités complexes de l'équation d'Euler est motivée par le célèbre problème de régularité des solutions de l'équation Navier-Stokes qui reste également un problème ouvert [16].

Le cas classique des singularités de l'équation de Burgers montre comment, dans ce cas, la viscosité régularise les solutions singulières de l'équation inviscide. Le problème [16] peut aussi être posé (peut-être de façon plus fondamentale) en terme de recherche de singularités réelles dans l'équation d'Euler 3D. Rappelons qu'à deux dimensions, l'équation d'Euler n'admet pas de singularité réelle à temps fini [17]. Sur ce sujet, le résultat de base à 3D a été obtenu en 1933 [18; 19], et montre que dans le cas de conditions initiales suffisamment régulière, la régularité des solutions n'est assurée que jusqu'à un temps fini.

Il existe alors deux types d'approche pour étudier ce problème : la première repose sur le résultat établi par Beale, Kato et Majda [20] qui assure qu'une singularité à temps fini fait diverger

l'intégrale temporelle du maximum de la vorticité, et donc la vorticité elle-même. L'évolution temporelle du maximum de vorticité dans des écoulements bien choisis est par conséquent une piste privilégiée pour prouver l'existence de chocs. Une autre approche consiste à s'intéresser à la taille de la bande d'analyticité du champ de vitesse dans le domaine complexe. La taille de la bande d'analyticité représente la distance  $\delta$  entre l'axe réel et la singularité complexe la plus proche. À 2D, la conservation de la vorticité assure que  $\delta$  n'atteint éventuellement 0 qu'au bout d'un temps infini [17]. À 3D, la vorticité n'est plus conservée, mais on a pu prouver que  $\delta$  varie continûment avec le temps [21; 22; 23; 24]. L'étude de la taille de la bande d'analyticité permet donc de repérer le précurseur d'une éventuelle singularité réelle à temps fini qui correspond au rapprochement [25] de l'axe réel d'une singularité complexe du champ de vitesse. C'est cette seconde approche que nous considérerons dans cette thèse.

D'autre part, depuis 1952 [26] et peut-être même depuis 1939 [27], on sait que les systèmes numériques des équations d'Euler tronquées spectralement (présentées en annexe) peuvent être considérés comme des systèmes dynamiques à part entière : ces systèmes tendent vers des équilibres thermodynamiques connus sous le nom d'"équilibres absolus" [28], et ont été étudiés par Orszag en résolution  $32^3$  [3].

L'approche singularité (validité de l'approximation d'une EDP continue sous condition de résolution) et l'approche équilibre thermodynamique (valable au sens d'une suite d'EDO) sont conceptuellement disjointes. Ce qui est intéressant, c'est que les deux approches sont bien connues, mais personne n'a jamais essayé à notre connaissance d'étudier à haute résolution le régime transitoire de relaxation vers ces équilibres.

La motivation pour observer cette relaxation est sans doute venue de l'étude de la turbulence superfluide : en effet, l'observation de turbulence dans un fluide inviscide grâce à l'apparition d'un fluide normal qui exerce des frictions sur le superfluide pose des questions sur les conditions minimales d'apparition de comportements de type turbulence à la Kolmogorov [29; 30; 31]. Ces conditions sont en effet mal définies [32] car les processus précis d'injection et de dissipation ne sont pas discutés dans l'élaboration de cette théorie. L'équation de Navier-Stokes contient un terme de dissipation visqueuse. Ce terme assure une reconnection des tubes de vorticité [32]. Mais il semble que ce terme ne soit pas indispensable : la loi des  $5/3$  a en effet été déjà observée dans des simulations de turbulence superfluide [33; 34]. Par ailleurs, une reconnection *ad hoc* permettrait d'observer la même loi des  $5/3$  [35].

Nous avons donc entrepris d'envisager un cas minimal par construction : que se passe-t-il si l'on se contente de simuler l'équation d'Euler tronquée spectralement, c'est-à-dire si l'on ne met aucun terme particulier pour assurer la reconnection ?

Les simulations effectuées dans cette thèse se décomposeront donc en deux parties : un intervalle de temps durant lequel on approxime correctement l'EDP et qui permet d'observer la dynamique des singularités complexes ; et au delà, la dynamique n'a plus de sens en terme d'écoulement continu mais permet d'étudier la relaxation d'un système dynamique discret et fini vers un équilibre thermodynamique. À l'image de ces simulations, cette thèse regroupe deux types de résultats :

- un travail sur l'observation de la dynamique des singularités complexes, par l'étude de deux

écoulements (conditions initiales de Taylor-Green et de Kida-Pelz [36]). L'écoulement de Kida-Pelz présente des oscillations dans son spectre d'énergie qui sont interprétables en terme d'interférences entre deux singularités complexes.

- un travail sur un sujet tout à fait nouveau : l'étude de la dynamique de relaxation des équations d'Euler tronquées spectralement. La dynamique est organisée par une séparation d'échelle, les plus petites échelles se comportant dans l'espace spectral comme un micro-monde fictif jouant un rôle dissipatif sur les grandes échelles. Nous verrons en effet que ce processus permet d'envisager un amortissement effectif sur les grandes échelles, autorisant un comportement turbulent compatible avec K41.

Cette thèse se décompose en 6 chapitres : le chapitre 1 sera consacré à l'étude de la dynamique des singularités complexes dans le cas de deux écoulements (Taylor-Green et Kida-Pelz). Comme signalé plus haut, les spectres d'énergie de l'écoulement de Kida-Pelz présentent des oscillations dont nous présentons l'interprétation en terme d'interférences entre deux singularités complexes, ce qui nous amènera à étendre le critère développé par Sulem, Sulem & Frisch [37] au cas de deux singularités approchant l'axe réel. Ce travail a fait l'objet d'une publication parue [38] que l'on trouvera à la fin de ce mémoire. Le chapitre 2 présente l'évolution des simulations précédentes au delà du critère établi dans le chapitre 1 : il s'agit de l'étude de la relaxation des équations d'Euler tronquées vers les équilibres absolus. Nous verrons que cette relaxation est lente et organisée avec l'apparition d'une séparation spontanée d'échelle : les petites échelles présentent un comportement d'équilibre local permettant l'observation de turbulence à grande échelle. Les deux aspects (singularité et relaxation) sont abordés simultanément pour le cas du vortex de Taylor-Green dans l'article [39] que l'on trouvera joint à la fin de ce mémoire.

Si les deux premiers chapitres étudient des systèmes transitoires, les deux chapitres suivants sont consacrés à l'étude d'équilibres statistiques. Dans le chapitre 3, nous introduisons le cadre théorique autorisant la description des systèmes Hamiltoniens et quasi-Hamiltoniens finis à l'équilibre thermodynamique, afin de démontrer une variante des théorèmes de Fluctuation-Dissipation bien connus. L'existence de ce théorème jouera un rôle central dans l'interprétation des résultats du chapitre 2. Le chapitre 4 propose une étude de systèmes quasi-Hamiltoniens à l'équilibre. Nous effectuons des simulations Monte-Carlo afin de caractériser les fonctions d'auto-corrélations des modes de la vitesse : nous exhibons des lois d'échelle pour leurs temps caractéristiques. Par ailleurs, le cadre général du chapitre 3 permet d'envisager des calculs analytiques que nous comparerons aux résultats des simulations. Les résultats sont d'abord présentés pour l'équation de Burgers 1D, puis pour un code périodique général des équations d'Euler 3D pour lequel les résultats sont un peu plus inattendus.

Enfin, nous proposerons de mettre les résultats obtenus par l'étude des équilibres en regard de la relaxation lente des systèmes étudiés dans le chapitre 2, grâce à la relation de Fluctuation-Dissipation démontrée dans le chapitre 3. L'essentiel des résultats des chapitres 3, 4 et 5 ont fait l'objet d'une lettre publiée [40], jointe à la fin de ce mémoire. Un autre article (incluant l'ensemble des résultats de ces trois chapitres) est en cours de rédaction.

Les méthodes numériques et une description détaillée des systèmes d'équations considérés sont

décrites en annexe, dans le chapitre 6.

# Chapitre 1

## Dynamique des singularités complexes de l'équation d'Euler

L'existence d'une singularité de vorticité infinie à temps fini dans les écoulements d' Euler 3D incompressibles ayant des conditions initiales régulières reste un problème mathématique ouvert [25].

Une approche possible de ce problème est la méthode dite de bande d' analyticité [37]. Le principe de cette méthode consiste à chercher des singularités complexes par des simulations numériques directes (DNS) des équations d' Euler ayant assez de résolution spatiale pour capturer les queues exponentielles des transformées de Fourier. Le décrément logarithmique du spectre d'énergie aux grands modes  $k$  vaut alors deux fois la largeur  $\delta$  de la bande d' analyticité du champ de vitesse et le problème d'explosion se réduit à vérifier si  $\delta(t)$  s'annule en un temps fini.

Cette méthode a déjà été appliquée aux écoulements d'Euler 3D générés par les conditions initiales de Taylor-Green [6] (TG), avec des réolutions  $256^3$  [5] et  $864^3$  [7]. Il y avait été observé, après un court régime transitoire, que la largeur de la bande d' analyticité du champ de vitesse décroissait exponentiellement en temps. L'écoulement de Kida-Pelz (KP) a été introduit par Kida [36]. Il possède toutes les symétries du vortex de Taylor-Green et présente également quelques symétries additionnelles qui le rendent invariant par le groupe entier de symétrie octaédrique [41]. Cet écoulement a été utilisé par Pelz [42; 43; 44; 45] pour étudier le problème d'explosion des équations d'Euler par développement temporel en séries de Taylor. Il a également été utilisé par Pelz [46] pour effectuer des DNS de turbulence visqueuse.

Il a été avancé par Kerr [47] que l'ajout de symétries à celles que présente le vortex de Taylor-Green était nécessaire pour observer des singularités. Ainsi, l'écoulement de Kida-Pelz pourrait être un meilleur candidat pour les singularités à temps fini que celui de Taylor-Green. Le sujet principal est ici d'appliquer la méthode de la bande d' analyticité aux écoulements de Taylor-Green et Kida-Pelz jusqu'à des réolutions de  $2048^3$ . Il s'av rera nécessaire de généraliser les ajustements par moindres carrés (utilisés pour extraire  $\delta(t)$  des spectres d'énergie) de façon à prendre en compte les oscillations que l'on trouve dans les spectres d'énergie de Kida-Pelz.

Ce chapitre s'organisera comme suit : d'abord, nous reviendrons sur la description numérique standard utilisée pour intégrer les équations d'Euler. Puis nous proposerons la généralisation de l'ajustement et en montrerons les résultats.

## 1.1 Approche numérique

Les équations d'Euler 3D incompressible (éq. (1.1) et (1.2)) avec des conditions initiales  $2\pi$ -périodiques sont résolues numériquement en utilisant des méthodes pseudo-spectrales standard [1] en résolution  $N$ .

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1.2)$$

Le pas de temps est effectué selon un schéma leapfrog différence finie du second ordre. Les solutions sont desaliasées (voir annexe) en supprimant à chaque pas de temps les modes pour lesquels au moins une des composantes du vecteur d'onde dépasse les deux tiers du nombre d'onde maximum  $N/2$  (ainsi une simulation en  $2048^3$  est tronquée à  $k_{\max} = 682$ ). Les symétries sont aussi utilisées de façon standard pour réduire l'espace mémoire nécessaire et accélérer les calculs.

Deux types de simulations sont effectuées, et correspondent à différentes conditions initiales. Le premier type concerne le vortex de Taylor-Green [6] qui est l'écoulement incompressible 3D se développant à partir des conditions initiales suivantes, qui ne contiennent qu'un seul mode initial non nul :

$$u^{TG} = \sin(x) \cos(y) \cos(z), \quad v^{TG} = -u^{TG}(y, -x, z), \quad w^{TG} = 0. \quad (1.3)$$

Le second type de simulations concerne l'écoulement de Kida-Pelz [36; 41; 45], qui se développe à partir des conditions initiales suivantes :

$$u^{KP} = \sin(x)(\cos(3y) \cos(z) - \cos(y) \cos(3z)), \quad v^{KP} = u^{KP}(y, z, x), \quad w^{KP} = u^{KP}(z, x, y). \quad (1.4)$$

Des séries de simulations ont été effectuées pour les deux écoulements en variant la résolution  $N$ . De façon à suivre l'évolution temporelle de ces écoulements, on extrait de ces simulations le spectre d'énergie. Il est défini en effectuant des moyennes de  $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}', t)$  (la transformée de Fourier spatiale de la solution de l'équation (1.1)) sur les coquilles sphériques de largeur  $\Delta k = 1$  dans l'espace réciproque :

$$E(k, t) = \frac{1}{2} \sum_{k-\Delta k/2 < |\mathbf{k}'| < k+\Delta k/2} |\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}', t)|^2 \quad (1.5)$$

## 1.2 Évolution des spectres d'énergie

Quand le champ de vitesse est analytique, le spectre d'énergie  $E(k, t)$  décroît exponentiellement à grand  $k$  (avec un pré-facteur algébrique). Le décrétement logarithmique vaut deux fois la largeur  $\delta(t)$  de la bande d'analyticité de la solution prolongée en variables spatiales complexes. L'idée de la méthode de la bande d'analyticité [37] est de chercher dans l'évolution temporelle de  $\delta(t)$  des preuves pour ou contre l'explosion des équations.

Pour extraire  $\delta(t)$  des simulations numériques, on effectue un ajustement par moindres carrés du logarithme des spectres d'énergie sous la forme :

$$\text{Log}(E(k, t)) = C - n \text{Log}(k) - 2\delta k. \quad (1.6)$$

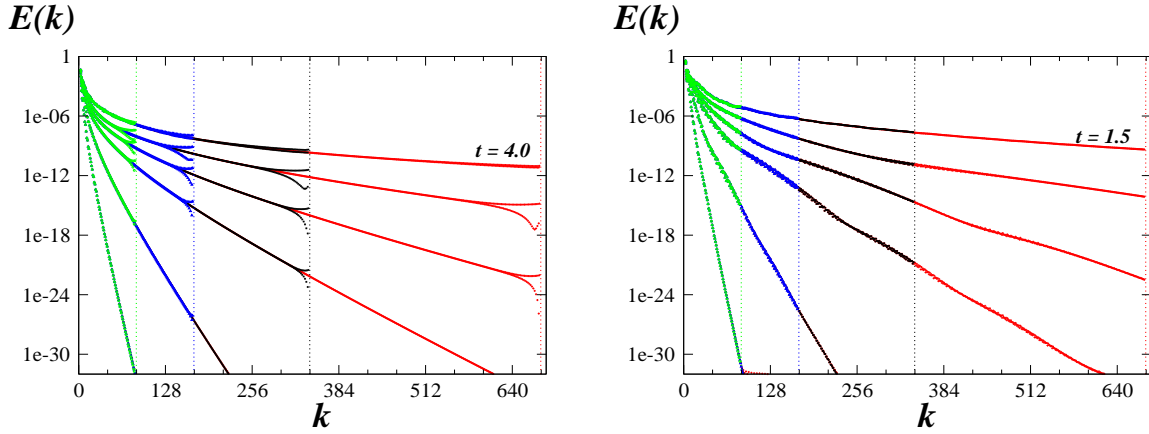


FIGURE 1.1 – Spectre d'énergie aux résolutions  $256^3$ ,  $512^3$ ,  $1024^3$  et  $2048^3$ ; la coupure spectrale est indiquée pour chaque résolution par des pointillés verticaux. **Gauche** : écoulement TG à  $t = (1.3, 1.9, 2.5, 2.9, 3.4, 4.0)$ . **Droite** : écoulement KP à  $t = (0.25, 0.5, 0.75, 0.9, 1.1, 1.5)$ .

L'erreur sur l'intervalle  $k_1 \leq k \leq k_2$  de l'ajustement est donnée par :

$$\chi^2 = \sum_{k_1 \leq k_i \leq k_2} (\text{Log}(E(k_i, t)) - (C - n \text{Log}(k_i) - 2\delta k_i))^2 \quad (1.7)$$

On minimise l'erreur en résolvant les équations  $\partial\chi^2/\partial C = 0$ ,  $\partial\chi^2/\partial n = 0$  et  $\partial\chi^2/\partial\delta = 0$ . Remarquons que ces équations sont linéaires vis-à-vis des paramètres d'ajustement  $C$ ,  $n$ , et  $\delta$ .

On présente sur la figure 1.1 des exemples des spectres d'énergie qui sont ajustés pour les écoulements de Kida-Pelz et de Taylor-Green. Il apparaît clairement sur la figure qu'à certains moments les spectres d'énergie du Taylor-Green présentent des oscillations spectrales pair-impair au voisinage de la coupure qui dépendent de la résolution.

Ce comportement est produit par l'erreur d'arrondi d'ordre  $\sim 10^{-15}$ . Pour une précision et une résolution fixées, le temps maximal jusqu'auquel la simulation est valable devrait être le premier instant auquel la valeur du spectre d'énergie pour le plus grand mode devient comparable au carré de l'erreur d'arrondi. Toutefois, ces erreurs d'arrondi n'affecte que les plus grands modes des spectres d'énergie du Taylor-Green. Elles sont éliminées en effectuant les moyennes de ces spectres sur les coquilles de largeur  $\Delta k = 2$ , avant de procéder aux ajustements [5].

On remarque par ailleurs que des oscillations de plus grande période sont visibles sur les spectres d'énergie du Kida-Pelz, mais qu'aucun effet de dépendance à la résolution n'est observé.

La mesure de  $\delta(t)$  est valable aussi longtemps qu'elle reste plus grande que quelques fois la taille de la maille élémentaire, condition requise pour que les plus petites échelles soient résolues correctement et que la convergence spectrale soit assurée. Ainsi, seuls les ajustements donnant une valeur de  $\delta$  telle que  $\delta k_{\max} > 2$  seront pris en compte.

La figure 1.2 montre les valeurs de  $\delta$  et  $n$  pour les deux écoulements. Il est clair qu'après une courte période transitoire,  $\delta(t)$  dans l'écoulement de Taylor-Green décroît comme :

$$\delta(t) = \delta_0^{TG} e^{-t/T_{TG}} \quad (1.8)$$



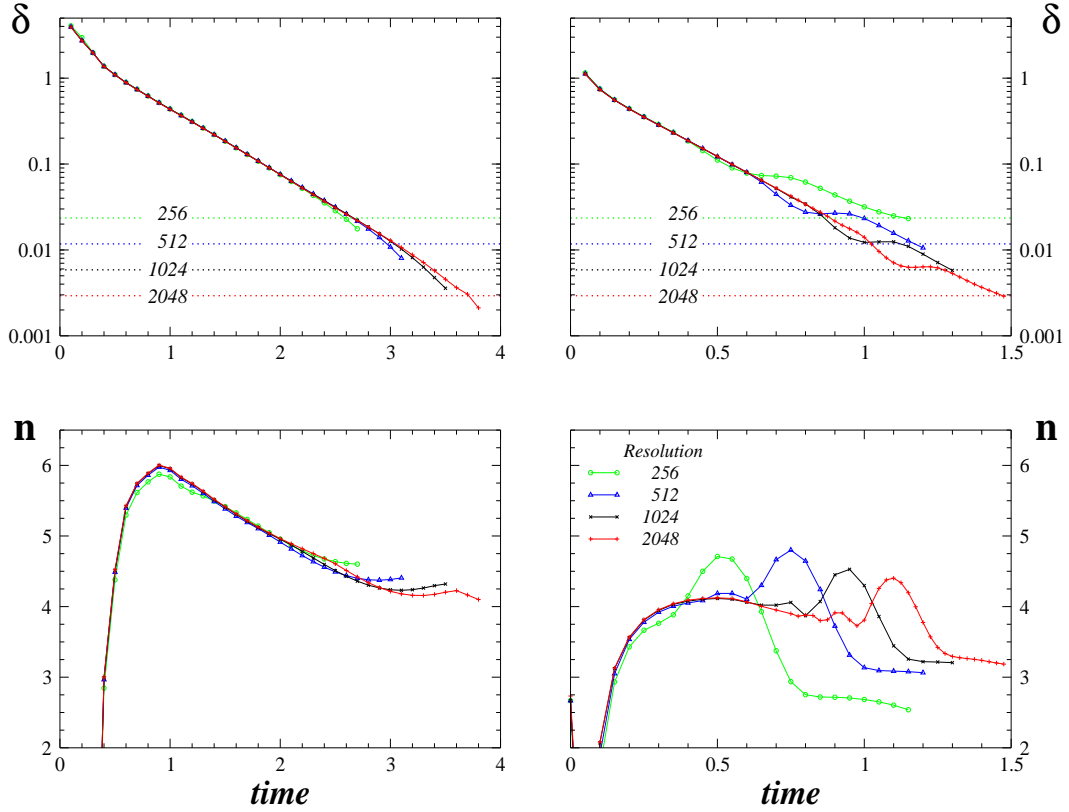


FIGURE 1.2 – Évolution temporelle du décrement  $\delta$  et du préfacteur  $n$  pour les écoulements TG (à gauche) et KP (à droite) aux différentes résolutions (voir éq. 1.6). Les ajustements sont effectués dans les intervalles  $k = 5$  à  $\min(k^*, N/3)$ , où  $k^* = \min_{E(k) < 10^{-32}}(k)$  marque le début du bruit d'arrondi aux temps courts.

avec un temps caractéristique  $T_{TG} = 0.56$  et une valeur initiale  $\delta_0^{TG} = 2.70$ , jusqu'au temps  $t = 3.7$  en résolution 2048<sup>3</sup> quand il devient comparable à deux fois la plus petite échelle résolue de l'écoulement.

Au contraire, on voit sur la partie droite de la figure 1.2 que les comportements de  $\delta$  et  $n$  sont erratiques dans l'écoulement de Kida-Pelz, et que leurs valeurs ne sont pas stables quand on change la résolution. Cela se produit alors que les spectres d'énergie de la plus haute résolution se confondent pour les petits modes avec les spectres des autres résolutions (voir figure 1.1). Ce type de comportement n'est possible que lorsqu'il existe une erreur systématique dans la procédure d'ajustement. Il est donc plausible que cette erreur provienne des oscillations de grande période faiblement visible sur les spectres du Kida-Pelz présentés sur la figure 1.1.

### 1.3 Interférences de singularités complexes

Pour prendre ces oscillations en compte, on généralise la forme fonctionnelle de (1.6) à :

$$\text{Log}(E(k, t)) = C - n\text{Log}(k) - 2\delta k + a \cos\left(2\pi \frac{k}{k_p}\right). \quad (1.9)$$

Les équations de l'ajustement par moindres carrés qui permettent de déterminer les valeurs des paramètres  $C$ ,  $n$ ,  $\delta$  et  $a$  sont linéaires, mais celle qui détermine  $k_p$  est non-linéaire. En pratique, on détermine  $C$ ,  $n$ ,  $\delta$  et  $a$  pour une valeur donnée de  $k_p$  et on prend le minimum de la somme des carrés des erreurs comme une fonction de  $k_p$  que l'on minimise numériquement.

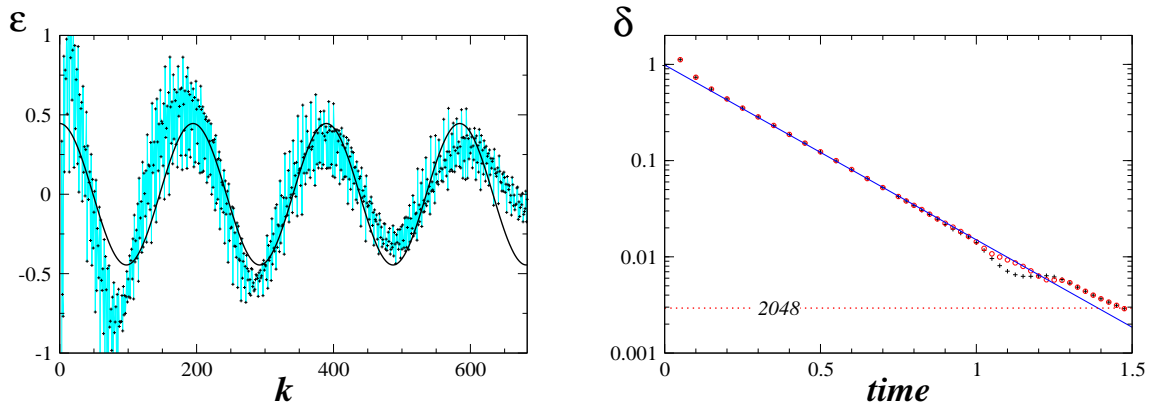


FIGURE 1.3 – **Gauche** : ajustement des oscillations spectrales pour l'écoulement KP ( $t = 0.8$ , résolution  $2048^3$ ). Points : le reste  $\epsilon = \text{Log}(E(k, t)) - (C - n\text{Log}(k) - 2\delta k)$  ; trait plein : terme d'amplitude  $a \cos(2\pi \frac{k}{k_p})$  (voir Eq. (1.9)). **Droite** : évolution temporelle du décrétement non corrigé  $\delta$  (Eq. 1.6 : croix +), du décrétement corrigé (eq. (1.9), cercles o) et son ajustement exponentiel entre  $t = 0.1$  et  $t = 1.25$  (trait plein).

On notera que l'hypothèse d'interférences entre deux singularités complexes ayant la même valeur de  $\delta$  mais des positions spatiales éloignées de  $2\delta_i$ , et un facteur de contraste  $a$  mène à une contribution au spectre d'énergie de la forme :

$$E(k) \sim e^{-2\delta k} (1 + a \cos 2\delta_i k). \quad (1.10)$$

En développant le log de cette expression au premier ordre en  $a$ , on trouve le terme supplémentaire de l'équation (1.9), avec  $k_p = \pi/\delta_i$ .

La présence d'un facteur de contraste peut être comprise comme en optique en considérant que les singularités ne sont pas des objets ponctuels, mais étendus. Il existe en effet de sérieuses preuves numériques [25] que les singularités complexes des équations d'Euler 2D sont situés sur des feuilletts 1D réguliers. Remarquons que dans le cas des équations de Burgers 1-D où la nature des singularités complexes (des pôles isolés) est bien comprise, il existe une autre façon que les procédures d'ajustement présentées ici pour capturer l'information sur  $\delta$  à partir des spectres d'énergie oscillants [48]. Cependant, dans le cas de Burgers, la facteur de contraste  $a$  est toujours de grande amplitude.

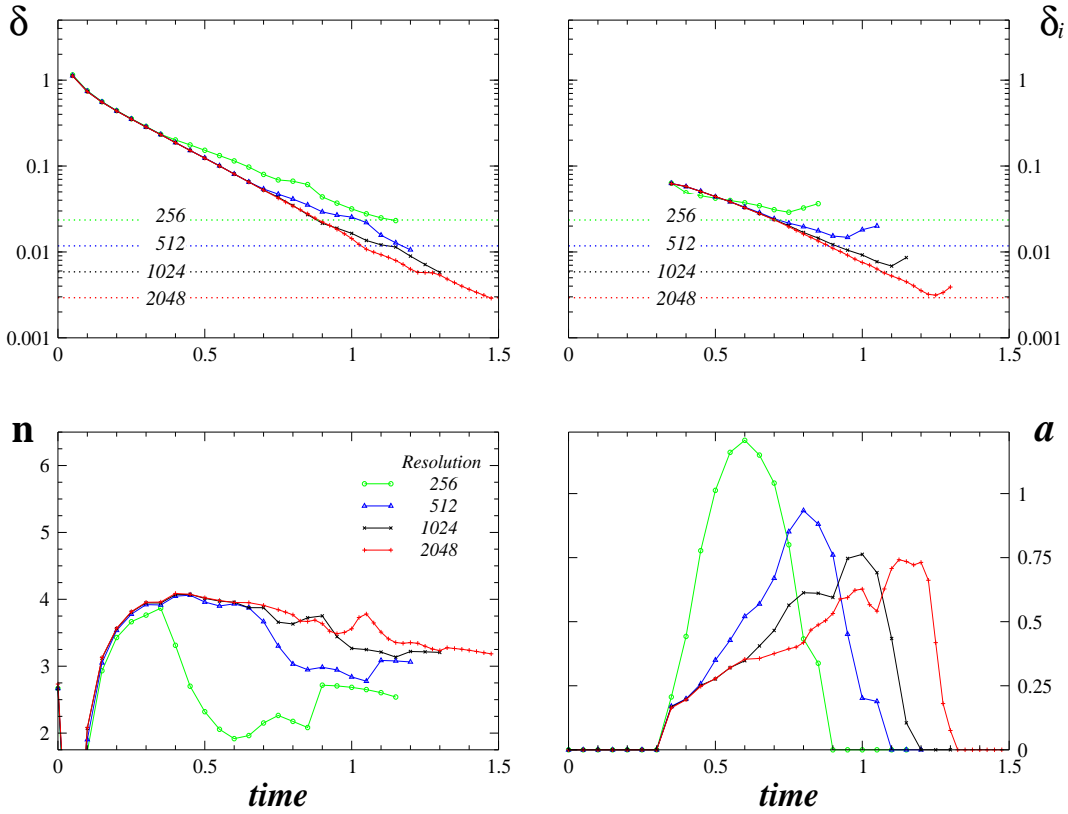


FIGURE 1.4 – Évolution temporelle du décrément corrigé  $\delta$ , du préfacteur corrigé  $n$ , de l'amplitude des oscillations  $a$  et du paramètre de séparation  $\delta_i = \pi/k_p$  pour l'écoulement KP aux différentes résolutions  $N$  (voir éq. 1.9). Les ajustements sont effectués dans les intervalles  $k = 5$  à  $\min(k^*, N/3)$ , où  $k^* = \min_{E(k) < 10^{-32}}(k)$  marque le début du bruit d'arrondi aux temps courts.

La partie résiduelle des données, et son ajustement, sont représentées ensemble sur la figure 1.3. Il est assez clair en regardant la figure que la qualité de cet ajustement est correcte.

On voit bien sur la figure 1.4 que le comportement erratique que  $\delta$  et  $n$  manifestent sur la figure 1.2 a été corrigé par l'ajustement étendu (1.9). L'effet le plus frappant est probablement celui observé sur  $n$  : les maxima de  $n$  qui dépendent de la résolution (voir figure 1.2) ne sont plus présents sur la figure 1.4. Le comportement correspondant de  $\delta$  a aussi été régularisé.

Le paramètre d'ajustement de la séparation des singularités  $\delta_i = \pi/k_p$  et l'amplitude  $a$  sont aussi présentés sur la figure 1.4.  $\delta_i$  décroît exponentiellement en temps (avec  $\delta_i(t) = 0.30 e^{-t/0.271}$  jusqu' au temps  $t = 1.25$  en résolution 2048<sup>3</sup>).

Les amplitudes présentent des maxima dépendant de la résolution, et ils se produisent au même instant que les maxima observés sur  $n$ , avant correction (voir figure 1.2). Il est facile de constater que ces maxima se produisent lorsque  $k_p = \pi/\delta_i \sim k_{\max}$  (figure 1.4).

On peut comprendre cela aisément comme suit : lorsque  $k_p \ll k_{\max}$ , les oscillations sont moyennées dans l'ajustement non corrigé (1.6) et les deux ajustements proposés donnent les

mêmes valeurs de  $n$  et  $\delta$ . Dans l'autre cas  $k_p \gg k_{\max}$ , aucune oscillation ne peut être détectée sur les données disponibles. Dans le régime intermédiaire, quand  $k_p$  s'approche de  $k_{\max}$ , la courbure du spectre d'énergie causée par l'oscillation est prise en compte par l'ajustement non corrigé comme une variation de  $n$  dans (1.6). Le fit corrigé (1.9) permet quant à lui de mieux séparer dans ce régime l'oscillation de la courbure due à  $n$ .

En utilisant les données sur  $\delta$  obtenue par l'ajustement corrigé (voir figure 1.3), on obtient que  $\delta(t)$  décroît selon :

$$\delta(t) = \delta_0^{KP} e^{-t/T_{KP}} \quad (1.11)$$

avec un temps caractéristique  $T_{KP} = 0.24$  et une valeur initiale  $\delta_0^{KP} = 1.02$ , jusqu'au temps  $t = 1.25$  en résolution  $2048^3$ , moment où l'ajustement corrigé commence à être affecté.

En inspectant la figure 1.4, on voit que l'amplitude  $a$  de l'ajustement au voisinage de son maximum est de l'ordre de l'unité, ce qui n'est plus cohérent avec l'approximation effectuée (i.e.  $a \ll 1$  dans le développement du log de (1.10)) pour trouver (1.9). Cela suggère que l'ajustement utilisant directement le logarithme de (1.10) pourrait donner de meilleurs résultats. De façon à approfondir cette question, nous avons également effectué ces ajustements logarithmiques. Cela requiert de chercher le minimum d'une fonction de deux variables (voir la discussion sous l'équation Eq. (1.9)).

Les résultats sont présentés sur la figure Fig. 1.5. Il est clair que la qualité de l'ajustement, mesurée par l'erreur quadratique  $\chi^2$ , et normalisée par le nombre de points ajustés, est vraiment améliorée quand on prend en compte les oscillations. Cependant, il n'y a pas vraiment d'amélioration en remplaçant l'ajustement de l'équation (1.9) à 1 paramètre non-linéaire par celui qui en comporte 2 (équ. (1.10)). Les comportements de  $\delta$  et  $n$  ne sont pas sensiblement modifiés mais on notera que l'amplitude  $a$  diminue quand on se sert du logarithme de (1.10).

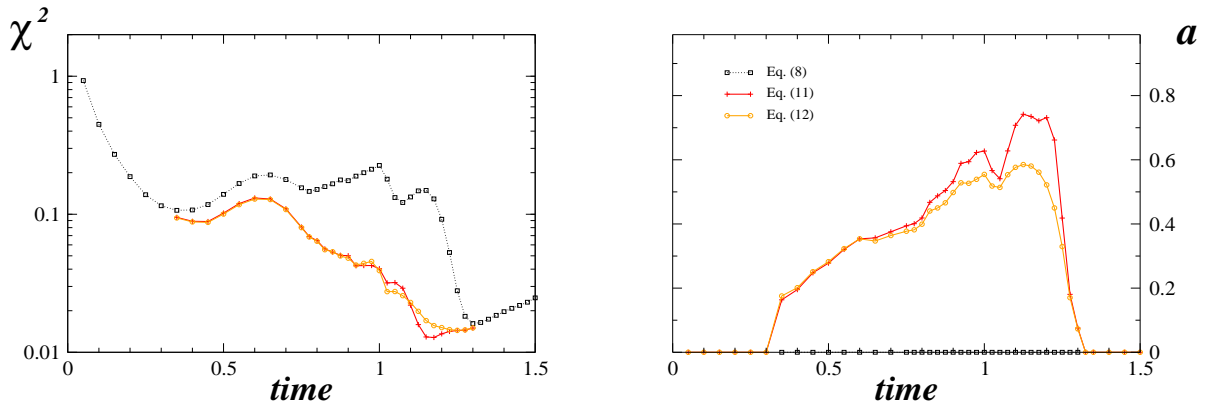


FIGURE 1.5 – **Gauche** : erreur quadratique  $\chi^2$ , normalisée par le nombre de points ajustés, correspondant aux 3 formes d'ajustement envisagées en résolution  $2048^3$ . **Droite** : comparaison des amplitudes  $a$ . Carrés, équ.(1.6) ; croix, équ.(1.9) ; cercles, équ.(1.10).

## 1.4 Discussions

En résumé, les singularités complexes dans les DNS (jusqu' aux résolutions  $2048^3$ ) des écoulements Taylor-Green et Kida-Pelz ont été étudiées par la méthode de la bande d'analyticité. La procédure d'ajustement du spectre d'énergie a été généralisée pour prendre en compte les oscillations causées par les interférences de singularités complexes. On a observé pour les deux types d'écoulement une décroissance exponentielle en temps de  $\delta$ .

Le développement temporel en série de Taylor estime que le temps  $t_P^*$  de singularité de Pelz (donné par Pelz [42; 43; 44; 45]) est  $t_P^* \sim 2$ .

Nous pouvons désormais estimer, en utilisant les données produites par les DNS jusqu'en résolution  $2048^3$ , la résolution nécessaire pour atteindre  $t_P^*$ , en supposant que le régime de décroissance exponentielle (1.11) se poursuit. La condition  $\delta k_{\max} = 2$  peut s'écrire :

$$\delta k_{\max} = N/3\delta_0^{KP} e^{-t_P^*/T_{KP}} = 2$$

et sa solution est  $N = 6e^{2/T_{KP}}/\delta_0^{KP} = 24472$ . Remarquons que la même condition  $\delta_i k_{\max} = 2$  doit être appliquée à la partie imaginaire des singularités, ce qui conduit à une condition plus contraignante :  $N = 32074$ .

Ainsi, des DNS effectuées avec des résolutions dans l'intervalle  $16384^3$ - $32768^3$  devraient pouvoir prouver l'existence de la singularité de Pelz à  $t_P^* \sim 2$ . En supposant une singularité réelle à cet instant, on devrait pouvoir mesurer numériquement une décroissance de  $\delta(t)$  plus rapide qu'exponentielle.

Des écoulements périodique-général ont été simulés jusqu'en résolution  $4096^3$  sur l'Earth Simulator [15]. Une mise en oeuvre efficace des symétries du Taylor-Green et du Kida-Pelz réduit l'espace de stockage mémoire et permet d'accélérer les calculs, permettant un gain en résolution d'un facteur 4 dans chaque direction d'espace [5]. Ainsi, les simulations du Kida-Pelz en résolution  $16384^3$  peuvent être atteintes par l'Earth Simulator.

## Chapitre 2

# Séparation spontanée d'échelles et Turbulence

Nous allons étudier ici la dynamique de relaxation vers l'équilibre d'un écoulement incompressible 3D régi par les équations d'Euler tronquées spectralement. Nous allons caractériser cette dynamique et mettre en évidence un comportement compatible avec une turbulence à la Kolmogorov, typique d'écoulements turbulents. Ce résultat est surprenant dans la mesure où les écoulements considérés dans cette thèse conservent parfaitement l'énergie.

Les équations simulées par le code sont les équations d'Euler, utilisant une méthode pseudo-spectrale avec une troncature Galerkin qui conserve l'énergie (voir méthode numérique). Cependant la discrétisation temporelle crée des erreurs contrôlées par le pas de temps d'intégration choisie. Nous montrons en annexe qu'un pas de temps leap-frog périodiquement recalculé par un pas Runge-Kutta d'ordre 4 suffit à assurer une précision globale supérieure au pour-cent. Ces simulations numériques établissent une approximation d'une EDP qui reste valable tant que les échelles caractéristiques sont plus grande que l'échelle de coupure. Au delà, le système sent les effets de la troncature.

Jusqu'ici, ces systèmes ont été étudiés dans la limite de validité de l'approximation pour observer des indices de singularités réelles à temps fini dans les équations d'Euler (comme nous l'avons fait dans le chapitre 1 de ce mémoire). Dans cette partie de la thèse, nous allons nous intéresser à un autre régime : on sort donc du cadre de description de l'EDP classique. Aussi peut-il sembler abusif de parler d'écoulement. Cependant les résultats présentés dans ce chapitre prennent un sens en terme de système dynamique fini. Nous détaillerons dans le chapitre suivant le formalisme adapté à la description de tels systèmes.

Nous allons dans un premier temps montrer que l'effet de la troncature sur l'écoulement est de conduire à une dynamique de séparation spontanée d'échelles avec apparition d'un "bain thermique", et que cette dynamique dépend de l'échelle de la troncature : concrètement, cela se traduit par l'apparition d'une zone de spectre croissante comme  $k^2$  dont l'extension augmente avec le temps, ce qui n'a jamais été observé auparavant à notre connaissance. Nous montrerons de plus que ce bain thermique joue un rôle dissipatif sur les grandes échelles qui permet d'observer un comportement à la Kolmogorov.

## 2.1 Évolution temporelle des spectres d'énergie

### 2.1.1 Apparition d'une zone thermalisée en $k^2$

Nous avons intégré les équations d'Euler (équ. (2.1) et (2.2)) pour les conditions initiales de Taylor-Green :

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} , \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 . \quad (2.2)$$

Les conditions initiales de Taylor-Green (voir annexe "Méthodes numériques") correspondent à un champ de vitesse initial  $\mathbf{u}_{(t=0)} = \mathbf{v}_{TG}$ , où  $\mathbf{v}_{TG}$  est défini par l'équation (1.3). Ce système conserve exactement l'énergie cinétique  $\sum_{k \leq k_{\max}} E(k, t)$ , où le spectre d'énergie  $E(k, t)$  est défini par la moyenne des modes  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}', t)$  du champ de vitesse  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$  sur les coquilles sphériques de largeur  $\Delta k = 1$ ,

$$E(k, t) = \frac{1}{2} \sum_{k-\Delta k/2 < |\mathbf{k}'| < k+\Delta k/2} |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}', t)|^2 . \quad (2.3)$$

Les simulations sont exécutées par méthode pseudo-spectrale (voir annexe) au delà de la limite d'intégration temporelle imposée pour résoudre les plus petites échelles caractéristiques de l'écoulement (voir chapitre 1). Au delà de cette limite, l'approximation de l'EDP n'est plus valable car les effets de la troncature spectrale se font sentir. Nous étudions donc ici les solutions générales d'un système fini d'équations différentielles ordinaires pour les variables complexes  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$  ( $\mathbf{k}$  est un vecteur 3 D d'entiers relatifs  $(k_1, k_2, k_3)$  vérifiant  $\sup_{\alpha} |k_{\alpha}| \leq k_{\max}$ ) :

$$\partial_t \hat{u}_{\alpha}(\mathbf{k}, t) = -\frac{i}{2} \mathcal{P}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{p}} \hat{u}_{\beta}(\mathbf{p}, t) \hat{u}_{\gamma}(\mathbf{k} - \mathbf{p}, t) , \quad (2.4)$$

$$\text{où } \mathcal{P}_{\alpha\beta\gamma} = k_{\beta} P_{\alpha\gamma} + k_{\gamma} P_{\alpha\beta} \text{ avec } P_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - k_{\alpha} k_{\beta} / k^2 , \quad (2.5)$$

et la convolution dans (2.4) est tronquée à  $\sup_{\alpha} |k_{\alpha}| \leq k_{\max}$ ,  $\sup_{\alpha} |p_{\alpha}| \leq k_{\max}$  et  $\sup_{\alpha} |k_{\alpha} - p_{\alpha}| \leq k_{\max}$ .

La figure 2.1 présente d'évolution temporelle du spectre d'énergie. On voit clairement se distinguer deux zones dans chaque spectre : une zone décroissante aux faibles nombres d'onde qui semble poursuivre régulièrement l'intégration temporelle de l'écoulement, et une zone croissante aux grands nombres d'onde.

Les courbes étant représentées en échelles log/log, on observe au delà d'un temps  $t = 5$  que les spectres semblent se comporter en loi de puissance à grands nombres d'onde. Un ajustement polynomial permet rapidement de conclure que les spectres se comporte en  $k^2$ .

Les spectres en  $k^2$  sont bien connus (depuis [2]) et sont interprétés en terme d'équilibre statistique : le spectre d'énergie est obtenu par sommation sur les coquilles (équ. (2.3)), ce qui donne bien une telle loi de puissance lorsque l'énergie est statistiquement répartie de façon égale entre les modes. Ces équilibres sont appelés équilibres absolus, et nous reviendrons sur leur définition détaillée dans le chapitre suivant.

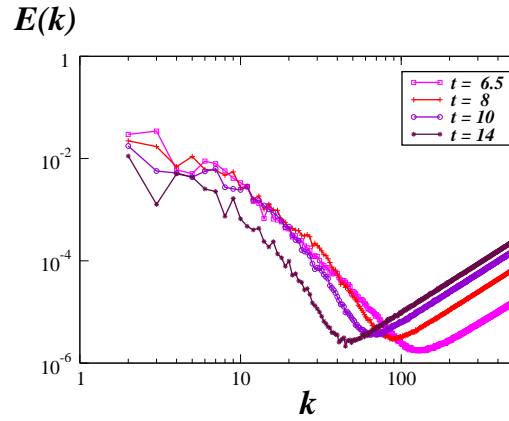


FIGURE 2.1 – Évolution temporelle du spectre d'énergie du Taylor-Green en résolution  $1600^3$  pour les temps  $t = (6.5, 8, 10, 14)$ .

Cependant, dans le cas présent, on est encore loin d'être à l'équilibre : il est tout à fait nouveau et étonnant d'observer un tel comportement lors d'un régime transitoire. En effet, la relaxation du système vers son équilibre absolu passe par des états transitoires de thermalisation partielle organisée par une séparation spontanée d'échelle.

On peut vérifier que l'équation de Burgers 1D  $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  relaxe également vers un équilibre absolu. Il est bien connu que cette équation peut présenter des singularités réelles à temps fini, par exemple pour l'intégration numérique avec des conditions initiales périodiques  $u_0 = \sin(2x)$ . L'évolution temporelle présente trois phases comme l'illustre la figure 2.2 où sont représentés le champ de vitesse et le spectre d'énergie aux temps  $t = 0.82, 1.3$  et  $5$ .

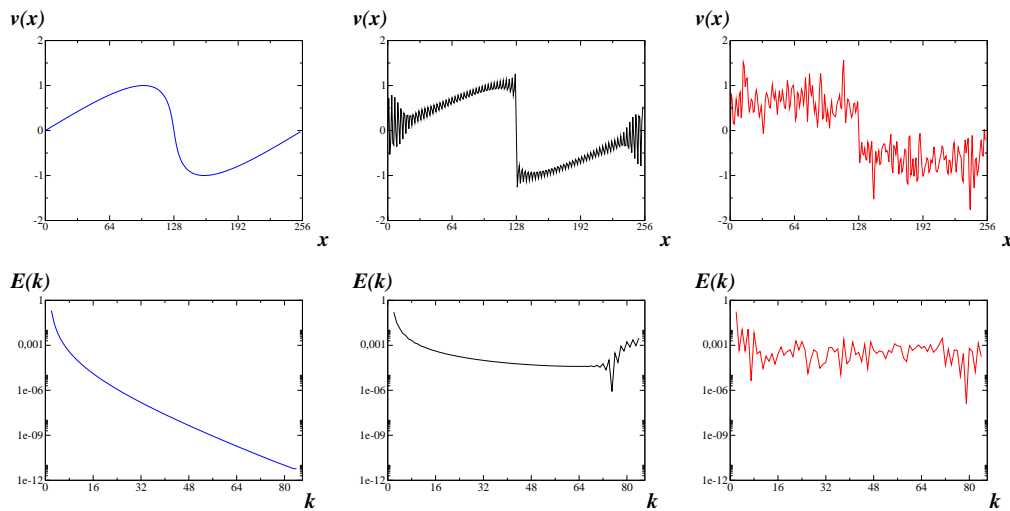


FIGURE 2.2 – **En haut** : champs de vitesse  $V(x)$  aux temps  $t = 0.82, 1.3, 5$  (de gauche à droite) pour l'équation de Burgers 1D. **En bas** : spectre d'énergie  $E(k)$  aux mêmes temps.

La première phase est l'évolution régulière du champ de vitesse vers une singularité. Dans la deuxième phase, après le choc, on peut voir le processus d'amortissement s'amorcer sur les champs



de vitesse, et le spectre d'énergie indique que cette thermalisation s'effectue par les plus grands modes  $k$ . Enfin à l'issue de la troisième phase, représentée sur la partie droite de la figure 2.2, on aboutit à un système entièrement thermalisé dont le spectre plat et bruité est caractéristique des équilibres absolus à une dimension : l'énergie est répartie également entre les modes, ce qui conduit à 1D à un spectre plat. On est à l'équilibre thermique.

Concluons que les écoulements évoluent donc spontanément vers un équilibre thermique, et la thermalisation se produit par les grands modes : la phase transitoire est caractérisée par l'apparition d'une zone croissante (en 3D) des spectres d'énergie créant une séparation spontanée d'échelle, que l'on peut interpréter comme une thermalisation partielle de ces écoulements.

### 2.1.2 Influence de la troncature

Compte tenu du fait que la thermalisation de notre système se produit par les grands nombres d'onde et dans des intervalles temporels où l'effet de la troncature n'est plus négligeable, on se doit d'étudier l'influence de la résolution.

On observe une évolution temporelle similaire des spectres : on retrouve un comportement des spectres en  $k^2$  pour les grands modes. La figure 2.3 présente les spectres d'énergie obtenus au même instant pour différentes résolutions. On observe qu'aux petits nombres d'onde, les spectres d'énergie coïncident, mais jusqu'à un certain point seulement : ils se dissocient au voisinage de leur zone thermalisée respective. On remarque que les zones thermalisées sont d'extension différente, caractérisée par une énergie  $E(k, t)$  par coquille (éq. (2.3)) décroissante de la résolution.

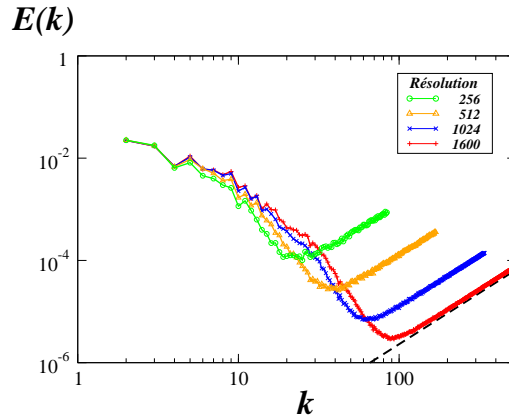


FIGURE 2.3 – Spectres d'énergie du Taylor-Green à  $t = 8$  pour différentes résolutions. En vert (o) :  $256^3$  ; en jaune ( $\Delta$ ) :  $512^3$  ; en bleu (x) :  $1024^3$  ; en rouge (+) :  $1600^3$ .

Par ailleurs, la figure 2.1 montre que  $E(k, t)$  est une fonction croissante du temps dans la partie thermalisée des spectres d'énergie. L'énergie totale de l'écoulement étant conservée, il n'est pas surprenant que d'autres coquilles de l'écoulement voient leur énergie diminuer au cours du temps. Cependant, il est intéressant de constater que chacune des coquilles de la partie "non thermalisée" des spectres d'énergie semble perdre de l'énergie au cours du temps.

Ainsi, durant la période transitoire d'évolution vers un équilibre thermique, on peut mettre en évidence l'existence d'une séparation spontanée d'échelle. Le spectre d'énergie est à tout instant divisé en deux parties : une partie décroissante dont l'énergie semble diminuer au cours du temps, et une partie croissante dont l'énergie semble augmenter au cours du temps. Dans la suite, nous allons plus avant dans la caractérisation de ces écoulements afin d'étudier l'interaction entre les deux zones de ces spectres d'énergie.

## 2.2 Dissipation d'énergie par thermalisation

### 2.2.1 Caractérisation du bain thermique

Les spectres d'énergie des figures 2.1 et 2.3 présentent tous un minimum, marquant la séparation spontanée d'échelle qui s'y produit. Des méthodes plus ou moins élaborées peuvent être envisagées afin de caractériser cette échelle de séparation. Nous avons choisi la plus naturelle, qui reste assez grossière : on appellera  $k_{th}$  le mode correspondant au minimum de chaque spectre.

La partie gauche de la figure 2.4 montre l'évolution de  $\text{Log}(k_{th})$  au cours du temps pour les différentes résolutions. On constate que pour chaque résolution  $k_{th}$  diminue au cours du temps, ce qui correspond à une thermalisation progressive des écoulements.

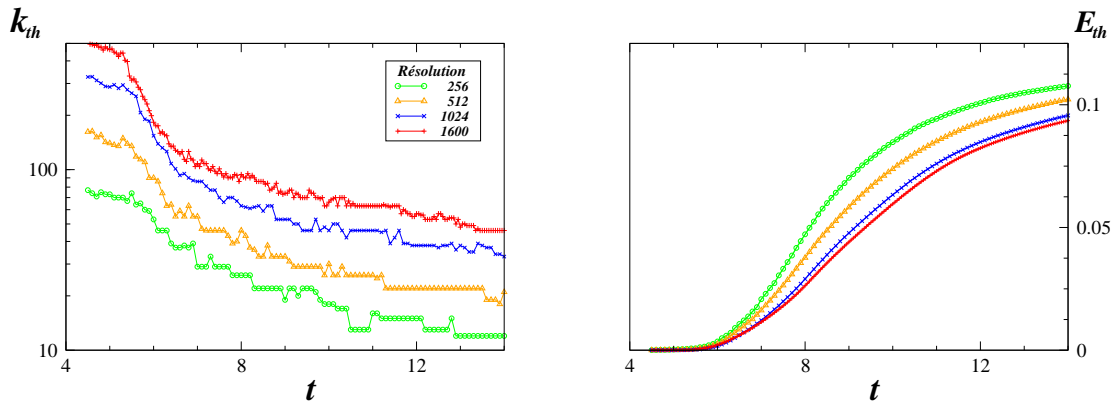


FIGURE 2.4 – Évolution temporelle de la séparation d'échelle  $k_{th}$  (à gauche), et de l'énergie thermique  $E_{th}$  (à droite) pour différentes résolutions. En vert (o) :  $256^3$  ; en jaune ( $\Delta$ ) :  $512^3$  ; en bleu (x) :  $1024^3$  ; en rouge (+) :  $1600^3$ .

L'existence de la séparation d'échelle  $k_{th}$  nous permet de définir un écoulement principal (mode inférieurs à  $k_{th}$ ) et un "bain thermique". Le bain thermique est ainsi constitué des modes supérieurs à  $k_{th}$ , jusqu'à  $k_{max}$ . Son énergie  $E_{th}(t)$  est alors :

$$E_{th}(t) = \sum_{k_{th} < k < k_{max}} E(k, t) . \quad (2.6)$$

On représente sur la partie droite de la figure 2.4 l'évolution temporelle de l'énergie thermique pour chaque résolution. On notera tout d'abord que l'énergie totale de chaque écoulement est

conservée et vaut  $1/8$  (voir figure 6.1 en Annexe). Alors on constate que l'énergie thermique est croissante et atteint asymptotiquement la valeur  $1/8$ , c'est-à-dire que l'énergie totale est transférée au bain thermique. Il existe donc bien un mécanisme de transfert d'énergie depuis l'écoulement vers ce bain thermique. À la limite, l'équilibre absolu est atteint. Par ailleurs, le temps de relaxation vers cet équilibre augmente avec la résolution, c'est à dire avec le nombre de modes présents dans l'écoulement.

D'autre part, nous pouvons chercher à définir une "température" pour chaque bain thermique. En supposant que le bain thermique est à l'équilibre à chaque instant, son spectre énergie  $E(k, t)$  doit être proportionnelle à  $k^2 T$  (voir chapitre 4 équation (4.23)). On peut ainsi définir une température, dépendant du temps, en effectuant une moyenne sur l'ensemble des modes constituant le bain thermique :

$$T(t) = \frac{1}{k_{max} - k_{th}} \sum_{k_{th} < k < k_{max}} \frac{E(k, t)}{k^2}. \quad (2.7)$$

Étant donné la façon grossière dont on a choisi de définir l'échelle de séparation  $k_{th}$ , les premiers modes du bain thermique ne sont peut-être pas tout à fait thermalisés. On décide donc de mesurer la température comme suit : on effectue un ajustement du spectre d'énergie du bain thermique par un polynôme  $a + b k^2$  jusqu'à la troncature spectrale, mais par précaution, cet ajustement débute au delà de  $k_{th}$  (arbitrairement à  $1.5 k_{th}$ ) de façon à exclure les premiers modes du bain thermique. La partie gauche de la figure 2.5 présente le résultat d'un tel ajustement. On constate que la température varie régulièrement au cours du temps, et de façon strictement monotone.

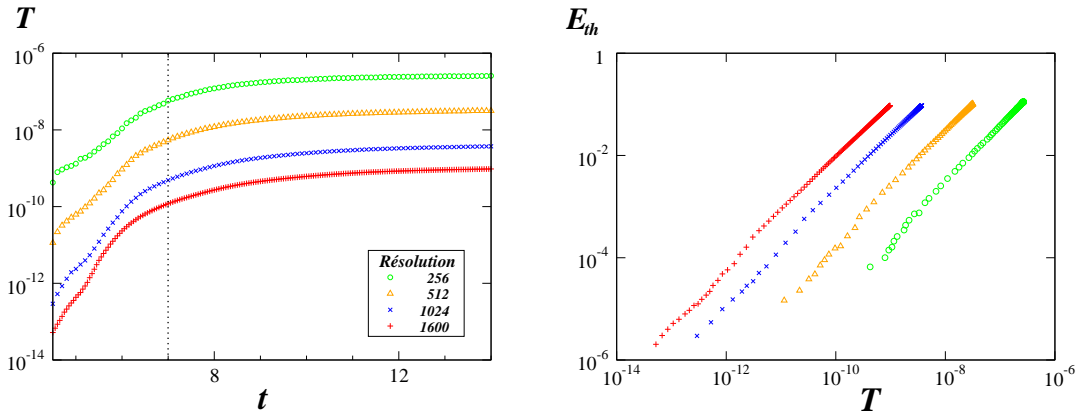


FIGURE 2.5 – **Gauche** : évolution temporelle de la température  $T$  pour différentes résolutions ( $256^3$ ,  $512^3$ ,  $1024^3$ ,  $1600^3$ ). **Droite** : énergie du bain thermique  $E_{th}$  en fonction de la température  $T$  en échelles logarithmiques, pour les mêmes résolutions.

Avant  $t = 6$ , la partie gauche de la figure 2.4 montre que l'étendue spectral du bain est probablement trop faible pour mesurer de façon fiable une température. A partir de  $t = 7$  la croissance semble ralentir significativement : la dynamique de relaxation devient lente. Par ailleurs, on remarquera que la température tend asymptotiquement vers une constante différente pour chaque

résolution. Cela se comprend bien si on note que les différentes simulations sont effectuées à énergie constante  $E_{tot} = 0.125$  en variant la résolution. En effet, utilisant la propriété de croissance parabolique de la zone thermalisée du spectre,  $E(k, t) = T k^2$ , on a :

$$E_{th} = \int_{k_{th}}^{k_{max}} E(k, t) dk = \int_{k_{th}}^{k_{max}} T k^2 dk = \frac{1}{3} (k_{max}^3 - k_{th}^3) T . \quad (2.8)$$

La capacité calorifique vaut  $C_T = \frac{1}{3} (k_{max}^3 - k_{th}^3)$ . Quand  $t$  tend vers l'infini,  $k_{th}$  est très inférieur à  $k_{max}$  et  $C_T$  tend vers  $k_{max}^3$ . Cela explique parfaitement l'écart des asymptotes en température observées. On retrouve cet écart asymptotique en représentant  $\log(E_{th})$  en fonction du logarithme de la température  $\log(T)$  (partie droite de la figure 2.5).

En conclusion, la zone croissante des spectres d'énergie à grands  $k$  se comporte comme un bain thermique auquel on peut associer une température qui varie lentement avec le temps.

### 2.2.2 Puissance dissipée et loi de Kolmogorov

L'existence d'un bain thermique dont l'énergie et la température augmentent au cours du temps permet d'envisager un taux de transfert de l'énergie depuis l'écoulement principal vers le bain thermique. Comme l'énergie du système est conservée, ce transfert joue le rôle d'une dissipation  $\varepsilon$  pour l'écoulement principal. La figure 2.4 montre que l'évolution temporelle de l'énergie thermique présente un point d'inflexion. Cela suggère que la puissance  $\varepsilon$  reçue par le bain thermique présente un maximum. La figure 2.6 présente l'évolution temporelle de la dissipation  $\varepsilon(t)$  obtenue par dérivation temporelle de l'énergie thermique  $E_{th}(t)$  :

$$\varepsilon = \frac{d E_{th}(t)}{dt} \quad (2.9)$$

On peut vérifier sur la partie gauche de la figure 2.6 l'existence d'un maximum de dissipation pour chaque résolution étudiée. Cependant, on remarque que ce maximum dépend de la résolution : il se produit plus tard quand la résolution augmente, et son amplitude diminue avec la résolution. Pour les résolutions  $(256^3, 512^3, 1024^3, 1600^3)$ , les valeurs  $\varepsilon$  au maximum de dissipation  $(0.028, 0.024, 0.020, 0.019)$  sont de l'ordre de celles observées pour des simulations des équations Navier-Stokes avec les mêmes conditions initiales, et les temps auxquels ils se produisent  $(7.7, 7.9, 8.1, 8.2)$  sont tout à fait comparables à ceux obtenus pour des échelles de dissipation visqueuse adaptées à de telles résolutions (voir référence [5], figure 7 and référence [32], figure 5.12). Ce résultat est probablement l'un des principaux résultats quantitatifs de cette partie de la thèse. De plus, le comportement quasi linéaire aux temps longs de  $\varepsilon^{-1/3}$  (figure 2.6) est cohérent avec un comportement auto-similaire à la Kolmogorov  $\varepsilon \sim L_0^2 t^{-3}$ .

Au voisinage du maximum de dissipation, la dissipation peut être considérée comme stationnaire. On est alors proche des conditions requises par la théorie K41 : les grandes échelles de l'écoulement transfèrent de l'énergie vers les plus petites échelles, et le taux de transfert est constant. On peut donc s'attendre à observer au voisinage du maximum de dissipation une loi d'échelle en  $k^{-5/3}$  à la Kolmogorov. On effectue donc un ajustement à deux paramètres du spectre d'énergie de la forme :

$$\log(E(k, t)) = C - n \log(k) . \quad (2.10)$$

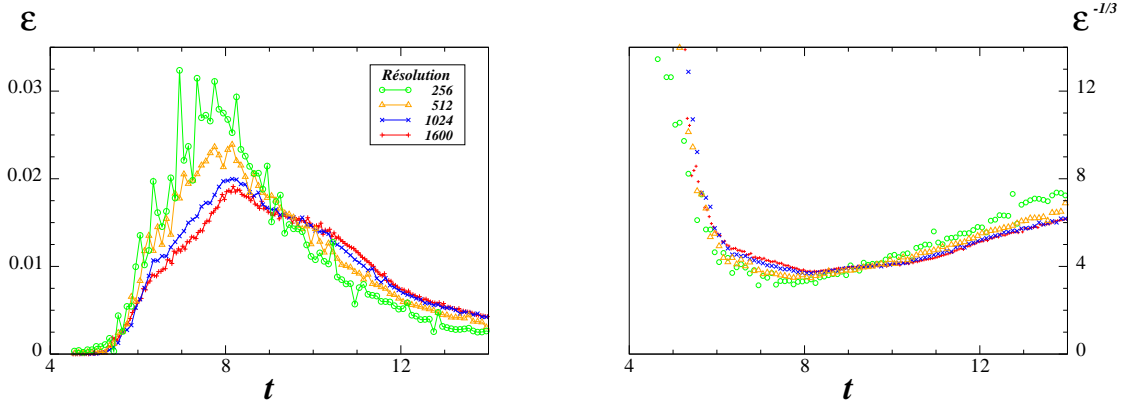


FIGURE 2.6 – **Gauche** : évolution temporelle de la puissance  $\varepsilon$  dissipée vers le bain thermique pour différentes résolutions. **Droite** : évolution temporelle de  $\varepsilon^{-1/3}$  pour les mêmes résolutions. En vert (o) :  $256^3$  ; en jaune ( $\Delta$ ) :  $512^3$  ; en bleu (x) :  $1024^3$  ; en rouge (+) :  $1600^3$ .

L'ajustement est effectué sur les tout-premiers modes du spectre : on débute l'ajustement à  $k = 2$  jusqu'à  $k = (12, 14, 16, 20)$  pour les résolutions ( $256^3, 512^3, 1024^3, 1600^3$ ). Les valeurs du coefficient  $n$  obtenus sont représentées sur la figure 2.7. Elles sont tout à fait compatibles avec la loi en  $k^{-5/3}$  au voisinage maximum de dissipation  $t \sim 8$ .

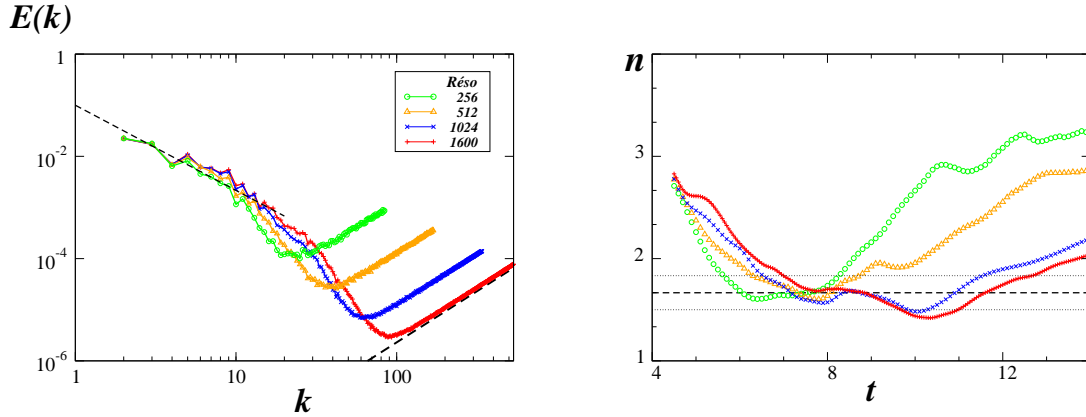


FIGURE 2.7 – **Gauche** : spectres d'énergie du Taylor-Green à  $t = 8$ , et droites de pente  $k^{-5/3}$  et  $k^2$  (en pointillés noirs). **Droite** : valeurs du coefficient  $n$  dans l'ajustement à deux paramètres (éq. 2.10) des spectres d'énergie. Les pointillés indiquent les valeurs  $n = 5/3 \pm 1/6$ . En vert (o) :  $256^3$  ; en jaune ( $\Delta$ ) :  $512^3$  ; en bleu (x) :  $1024^3$  ; en rouge (+) :  $1600^3$ .

On peut alors donner une estimation grossière du nombre d'onde  $k_{th}$  obtenue en négligeant l'absorption intermédiaire. Cela consiste simplement à supposer une loi d'échelle à la Kolmogorov  $E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$  pour  $k < k_{th}$ , et un équilibre absolu  $E(k) \sim 3k^2 E_{th}/k_{max}^3$  pour  $k > k_{th}$ . L'intersection de ces deux parties du spectre donne alors une première estimation  $k_m$  de  $k_{th}$

$$k_m \sim \left( \frac{\varepsilon}{E_{th}^{3/2}} \right)^{2/11} k_{max}^{9/11}. \quad (2.11)$$

Le rapport  $k_{th}/k_m$  est présenté sur la figure 2.8 et semble raisonnablement constant.

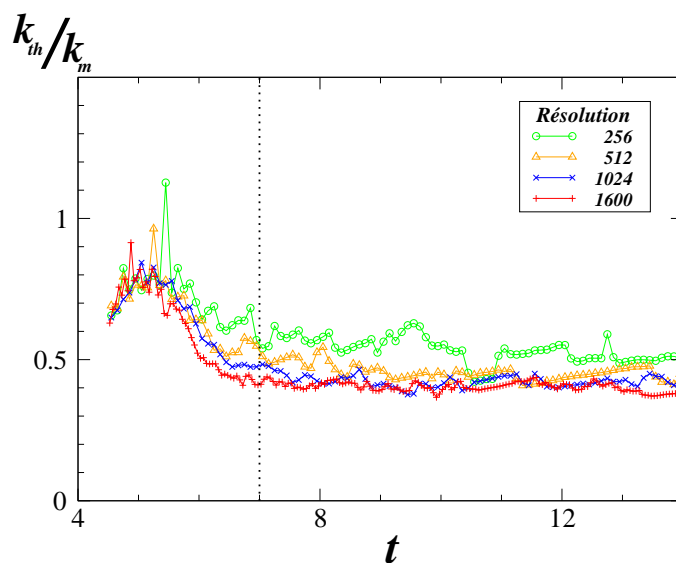


FIGURE 2.8 – Évolution temporelle du rapport  $k_{th}/k_m$  aux différentes résolutions.

En conclusion de ce chapitre, nous observons que les simulations développent spontanément une séparation d'échelle permettant de diviser l'écoulement en deux parties : un écoulement principal et un bain thermique. On a montré que l'effet du bain thermique est de dissiper l'énergie de l'écoulement principal, permettant d'observer une loi d'échelle compatible avec la théorie K41 et un flux d'énergie assez proche de ce qui est observé en turbulence. À l'image du fluide normal en turbulence superfluide, il semble donc que le bain thermique permette d'assurer les mécanismes (reconnection des lignes de vorticité) nécessaires à l'observation de ces propriétés de turbulence. De ce point de vue, l'équation d'Euler tronquée est un système minimal permettant d'observer un comportement de type turbulent [35].



## Chapitre 3

# Relaxation et relation de Fluctuation-Dissipation

Ce chapitre a pour but de poser un cadre descriptif des phénomènes évoqués dans le chapitre précédent : les équilibres absolus. Afin de rendre compte des effets de relaxation que nous avons observés lors de la transition lente vers ces équilibres, nous voudrions étudier les fonctions de réponse de systèmes régis par une dynamique eulérienne tronquée spectralement. À cet effet, nous établirons une relation de Fluctuation-Dissipation.

Les théorèmes de Fluctuation-Dissipation (FDT) établissent en effet une relation entre les fonctions de réponse d'un système et ses fonctions de corrélations. Cependant, les fonctions de réponse individuelles (avant moyenne d'ensemble) divergent rapidement en temps pour des systèmes chaotiques, ce qui les rend difficile à calculer directement. La relation de Fluctuation-Dissipation que nous établirons permettra de ramener la recherche de temps propres des fonctions de réponse à la caractérisation des fonctions de corrélation qui sont beaucoup plus faciles à obtenir numériquement. Une relation de Fluctuation-Dissipation a déjà été démontrée par Kraichnan [49]. Toutefois, il nous a paru utile d'en exposer la démonstration.

Nous présentons dans ce chapitre le cadre théorique nécessaire à l'étude d'équilibres statistiques de systèmes hamiltoniens. Puis nous montrerons que ce cadre s'adapte à la description d'équilibres statistiques régis par des équations de mécanique des fluides dans le cas de l'équation de Burgers unidimensionnelle, ainsi que dans le cadre des équations d'Euler tri-dimensionnelles. Ainsi, nous pourrions présenter la démonstration d'une relation générale de Fluctuation-Dissipation dans des systèmes hamiltoniens. À titre d'exemple, nous considérerons cette démonstration dans le cas intégrable d'un oscillateur non-linéaire. Enfin, nous établirons la relation de Fluctuation-Dissipation dans le cas des équilibres absolus.

### 3.1 Équation et théorème de Liouville

Nous commençons par rappeler certaines notions élémentaires de mécanique statistique, puis établissons l'équation et le théorème de Liouville [cf. [50]].

Soit un système dynamique  $\dot{\mathbf{X}}_i = \mathbf{V}_i(X_1, \dots, X_{2N})$  évoluant dans l'espace des phases à  $2N$  dimensions. On peut le représenter géométriquement comme un point de coordonnées  $(X_1, \dots, X_{2N})$



dans l'espace des phases dont la répartition suit une probabilité de  $P(X_1, \dots, X_{2N}, t)$  obéissant à l'équation de Liouville, qui exprime la conservation de la probabilité dans l'espace des phases :

$$\partial_t P(X_1, \dots, X_{2N}, t) + \sum_{i=1}^{2N} \partial_{X_i} (\mathbf{V}_i(X_1, \dots, X_{2N}) P(X_1, \dots, X_{2N}, t)) = 0 . \quad (3.1)$$

Remarquons que cette équation est habituellement utilisée dans le cadre de la mécanique hamiltonienne où l'on considère les positions  $q_i$  et les impulsions  $p_i$  qui obéissent aux équations de Hamilton :

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

On peut aussi écrire l'ensemble de ces coordonnées à l'aide d'un vecteur  $\mathbf{Q}$  tel que sa transposée  $\mathbf{Q}^* = (q_1, p_1, \dots, q_i, p_i, \dots, q_N, p_N)$ . On considèrera par la suite les variables  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{Q}_0$ ,  $\dot{\mathbf{Q}}$ ,  $\dot{\mathbf{Q}}_0$  comme  $\mathbf{Q} \equiv \mathbf{Q}(\mathbf{t})$ ,  $\mathbf{Q}_0 \equiv \mathbf{Q}(t_0)$ ,  $\dot{\mathbf{Q}} \equiv \frac{d\mathbf{Q}}{dt}$  et  $\dot{\mathbf{Q}}_0 \equiv \frac{d\mathbf{Q}_0}{dt_0}$ , où  $t_0$  est l'instant initial. Le gradient par rapport aux coordonnées de  $\mathbf{Q}$  est noté  $\nabla$ . Les équations de Hamilton deviennent alors :

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{I} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{Q}^*} = \mathbf{I}(\nabla H) = \mathbf{V}(\mathbf{Q}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 0 & & & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} . \quad (3.2)$$

Démontrons le théorème de Liouville, indiquant que l'élément de volume de l'espace des phases est conservé :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \sum_i \frac{\partial V_i(\mathbf{Q})}{\partial Q_i} = \sum_{i=1}^{2N} \frac{\partial (\mathbf{I} \nabla H)_i}{\partial Q_i} = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial^2 H}{\partial Q_{2j} \partial Q_{2j-1}} - \frac{\partial^2 H}{\partial Q_{2j-1} \partial Q_{2j}} \right) = 0 , \quad (3.3)$$

et l'équation de Liouville devient, compte tenu de l'équation (3.3)

$$\partial_t P = - \left( (\nabla \cdot \mathbf{V}) P + \mathbf{V} \cdot (\nabla P) \right) = - \mathbf{V} \cdot \nabla P = - \mathbf{I} \nabla H \cdot \nabla P .$$

### 3.2 Équilibres absolus

Nous avons montré en annexe que les équations de Burgers sans viscosité peuvent s'écrire dans le domaine spectral comme :

$$\partial_t \hat{u}_k = i \frac{k}{2} \sum_l \hat{u}_l \hat{u}_{k-l} , \quad (3.4)$$

où  $\delta$ , le symbole de Kronecker est tel que

$$\begin{cases} \delta(k-l-m) = 1 & \text{si } k = l + m , \\ \delta(k-l-m) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ici on posera  $q_i = \hat{u}_i$ . Les composantes spectrales de la vitesse sont des nombres complexes et représentent chacune deux degrés de liberté [2]. Pour  $N$  fixé le système des équations de Burgers tronquées revient à un système dynamique fini sur lequel il sera donc possible d'appliquer l'équation de Liouville.

Par la suite, notons que l'écriture indicée suit les conventions d'Einstein. Dans ce cadre, on peut écrire les équations de Burgers sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t q_n = \epsilon_{njk} q_j q_k \\ \epsilon_{njk} = i \frac{n}{2} \delta(n - j - k) \end{cases} \quad (3.5)$$

Nous pouvons en montrer quelques propriétés. L'équation 3.5 donne trivialement :  $\epsilon_{njk} = \epsilon_{nkj}$ .

$$\begin{aligned} \text{De plus } \epsilon_{-njk} + \epsilon_{-jkn} + \epsilon_{-knj} &= i(-n\delta(-n-j-k) - j\delta(-j-k-n) - k\delta(-k-n-j)) \\ &= -i(n\delta(n+j+k) + j\delta(j+k+n) + k\delta(k+n+j)) \\ &= -i(n+j+k)\delta(n+j+k) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Enfin :

$$\epsilon_{nnl} = \sum_{-\frac{N}{3} \leq n \leq \frac{N}{3}} i \frac{n}{2} \delta(n - n - l) = \sum_{-\frac{N}{3} \leq n \leq \frac{N}{3}} i \frac{n}{2} \delta(-l) = 0 .$$

Finalement les  $\epsilon_{njk}$  respectent trois propriétés remarquables :

$$\begin{cases} \epsilon_{njk} = \epsilon_{nkj} , \\ \epsilon_{-njk} + \epsilon_{-jkn} + \epsilon_{-knj} = 0 , \\ \epsilon_{nnk} = 0 . \end{cases} \quad (3.6)$$

L'énergie définie par  $E = \frac{1}{2} q_n q_n^*$  peut être écrite comme  $E = \frac{1}{2} q_n q_{-n}$  par propriété de la transformée de Fourier du champ de vitesse (qui est réel). On constate d'une part que l'énergie est bien conservée, comme attendu puisque l'équation de Burgers ne comporte pas de terme dissipatif :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (q_n q_{-n}) \\ &= \frac{1}{2} (\dot{q}_n q_{-n} + \dot{q}_{-n} q_n) \\ &= \frac{1}{2} (\epsilon_{njk} q_{-n} q_j q_k + \epsilon_{-njk} q_n q_j q_k) . \end{aligned}$$

Or  $\epsilon_{njk} q_{-n} q_j q_k = \epsilon_{-njk} q_n q_j q_k$  puisque les  $n$  sont sommés de  $-\frac{N}{3}$  à  $\frac{N}{3}$ , finalement

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \epsilon_{-njk} q_n q_j q_k .$$

En dérivant cette relation successivement par rapport à  $q_l$ ,  $q_m$  et  $q_r$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial q_l \partial q_m \partial q_r} \left[ \frac{\partial E}{\partial t} \right] &= \epsilon_{-rml} + \epsilon_{-mrl} + \epsilon_{-mlr} + \epsilon_{-rlm} + \epsilon_{-lmr} + \epsilon_{-lrm} \\ &= 2(\epsilon_{-mrl} + \epsilon_{-rlm} + \epsilon_{-lmr}) \\ &= 0 \quad \text{d'après l'équation (3.6),} \end{aligned}$$

ce qui montre que les différents termes de  $\epsilon_{-njk} q_n q_j q_k$  constituent une combinaison nulle, dont on déduit que  $\frac{\partial E}{\partial t} = 0$  : l'énergie est conservée.

D'autre part, bien que notre système n'ait pas une forme hamiltonienne, il vérifie le théorème de Liouville. En effet, d'après l'équation (3.5), on a :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \partial_{q_n} \dot{q}_n = \partial_{q_n} \epsilon_{njk} q_j q_k = \epsilon_{njn} q_k + \epsilon_{nnk} q_j ,$$

qui peut être réécrite, d'après l'équation (3.6),

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 2\epsilon_{nnk} q_k = 0 .$$

Par conséquent, l'équation de Liouville (3.1) s'écrit dans ce cas :

$$\partial_t P + \dot{q}_n \partial_{q_n} (P) = 0 . \quad (3.7)$$

Considérons alors la probabilité suivante :

$$P_s = \mathcal{N} \exp \left[ -\beta/2 \, q_{-\alpha} q_{\alpha} \right] . \quad (3.8)$$

On remarque que :

$$\partial_{q_n} (P_s) = -2 \, \beta/2 \, q_{-n} \, P_s ,$$

et comme la conservation d'énergie s'écrit aussi  $\dot{q}_n q_{-n} = 0$ , l'équation (3.7) devient :

$$\partial_t P_s = -\beta \, \dot{q}_n q_{-n} \, P_s = 0 .$$

On en déduit que la probabilité  $P_s$  (équ. 3.8) est stationnaire. Par définition [2], cette probabilité gaussienne décrit l'équilibre absolu. Nous avons vu qu'il est possible d'écrire des équations discrètes équivalentes aux équations (3.5) pour Euler 3D (équ. 2.4). On peut écrire dans ce cas (nous y reviendrons à la fin de ce chapitre) une probabilité stationnaire du type (équ. 3.8) qui définit un équilibre absolu.

À l'équilibre, chaque composante spectrale de la vitesse représente 2 degrés de liberté quadratiques (les composantes sont des nombres complexes), et chacun de ces degrés de liberté a une énergie moyenne de l'ordre de  $1/2\beta$ . En sommant sur les coquilles (équ. 2.3), on comprend désormais que le spectre d'énergie sera constant à 1D (comme on l'a vu sur la figure 2.2), linéaire en  $k$  à 2D, et parabolique (en  $k^2$ ) à 3D.

### 3.3 Fluctuation-Dissipation dans le cadre hamiltonien

Le but de notre étude étant de caractériser l'évolution des équations d'Euler tronquées vers l'équilibre absolu, on s'intéresse évidemment aux fonctions de réponse du système qui permettent de mesurer l'effet d'une perturbation. Cependant, le système étant chaotique, certaines perturbations peuvent croître exponentiellement en temps. Par conséquent pour obtenir la fonction de réponse, on devrait effectuer la moyenne de réponses exponentiellement divergentes en temps, ce qui exigerait d'effectuer des moyennes sur un nombre exponentiel de perturbations indépendantes. Cela est assez difficile, numériquement. C'est pourquoi on cherche à établir un théorème de Fluctuation-Dissipation : il permet de relier la fonction de réponse aux fonctions de corrélation temporelle d'un système. Les fonctions de corrélation sont en pratique plus faciles à calculer numériquement.

#### 3.3.1 Démonstration générale

Considérons pour cela un système décrit par le vecteur  $\mathbf{Q}$  introduit précédemment. Dans un souci de clarté on va adimensionner les composantes de  $\mathbf{Q}$ . On peut par exemple définir  $q_0$  et  $p_0$  comme étant respectivement la moyenne des conditions initiales en position et impulsion. On définit alors le vecteur  $\mathbf{X}$  sans dimension : pour  $i$  quelconque  $X_{2i+1} = Q_{2i+1} / q_0$ , et  $X_{2i} = Q_{2i} / p_0$ . On définit ensuite les fonctions de corrélation  $\Delta_{ij}(t)$  de  $X_i$  aux conditions initiales  $X_j^0$ , et les fonctions de réponse  $S_{ij}(t)$  de  $X_i$  aux variations de conditions initiales  $X_j^0$  moyennées sur la probabilité stationnaire :

$$\Delta_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\mathbf{X}^0) X_i X_j^0 d^{2N} X^0 \quad , \quad S_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\mathbf{X}^0) \frac{\partial X_i}{\partial X_j^0} d^{2N} X^0 . \quad (3.9)$$

Ici,  $\Delta_{ij}(t)$  est la moyenne à l'instant  $t$  sur l'ensemble des conditions initiales des corrélations de la coordonnée  $X_i$  à la coordonnée initiale  $X_j^0$  d'une trajectoire de l'espace des phases. La fonction de réponse  $S_{ij}(t)$  mesure à l'instant  $t$  l'écart moyen sur un ensemble de conditions initiales pour une coordonnée  $X_i$  entre deux trajectoires séparées initialement par une perturbation sur la condition initiale  $X_j^0$ .

En effectuant une intégration par parties sur  $S_{ij}(t)$  on obtient :

$$S_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial (X_i P)}{\partial X_j^0} d^{2N} X^0 - \int_{-\infty}^{+\infty} X_i \frac{\partial P}{\partial X_j^0} d^{2N} X^0 .$$

On écrit la probabilité stationnaire :  $P(\mathbf{X}^0) = \mathcal{N} e^{-\beta H}$  où  $\mathcal{N}$  est une constante de normalisation,  $H$  le Hamiltonien du système et  $\beta$  est le paramètre de la probabilité stationnaire gaussienne. On suppose que  $P$  tend plus vite vers zéro que  $\mathbf{X}$  ne tend vers l'infini de façon que  $X_i P$  tende vers zéro en  $+\infty$  et  $-\infty$ , ce qui assure que le premier terme du membre de droite converge vers 0. C'est par exemple le cas pour un hamiltonien quadratique tel que celui d'oscillateurs harmoniques ( $H = H_0 \mathbf{X}^0 \cdot \mathbf{X}^0$ ). On aura donc :

$$\mathbf{S}(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} X_i \frac{\partial P}{\partial X_j^0} d^{2N} X^0 .$$

On peut alors calculer la dérivée partielle de la probabilité stationnaire, en écrivant les équations de la dynamique hamiltonienne du système sous leur forme adimensionnée :

$$\frac{\partial P}{\partial X_j^0} = -\beta \frac{\partial H}{\partial X_j^0} P(\mathbf{X}^0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial X_j^0} = p_0 q_0 (I^{-1} \dot{\mathbf{X}}^0)_j .$$

Comme la matrice symplectique  $I$  est inversible et de carré  $I^2 = -\mathbb{1}$ , on a  $I^{-1} = -I$ . Donc  $\frac{\partial H}{\partial X_j^0} = -p_0 q_0 (I \dot{\mathbf{X}}^0)_j = -p_0 q_0 \sum_k I_{jk} \dot{X}_k^0$ . On en déduit :

$$S_{ij}(t) = -\beta p_0 q_0 \sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} P(\mathbf{X}^0) X_i I_{jk} \dot{X}_k^0 d^{2N} X^0 . \quad (3.10)$$

Par ailleurs, si on calcule la dérivée temporelle de la fonction de corrélation :

$$\frac{\partial \Delta_{ij}}{\partial t} = \dot{\Delta}_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\mathbf{X}^0) \dot{X}_i X_j^0 d^{2N} X^0 .$$

Le système suivant une probabilité stationnaire, la fonction  $\Delta_{ij}$  est invariante par translation en temps. Remarquons que  $\Delta_{ij}(t, t_0)$  n'est en réalité fonction que de  $t - t_0$ . Ainsi on peut écrire :

$$\frac{\partial \Delta_{ij}}{\partial t} = -\frac{\partial \Delta_{ij}}{\partial t_0} , \quad (3.11)$$

$$\text{et} \quad \dot{\Delta}_{ij}(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} P(\mathbf{X}^0) X_i \dot{X}_j^0 d^{2N} X^0 . \quad (3.12)$$

On obtient enfin par comparaison de (3.12) avec l'équation (3.10), la relation linéaire suivante :

$$S_{ij} = \beta p_0 q_0 \sum_k I_{jk} \dot{\Delta}_{ik}$$

qui constitue le théorème de Fluctuation-Dissipation.

### 3.3.2 Modèle de l'oscillateur

Nous allons illustrer ce théorème sur un modèle intégrable. Prenons le cas d'un oscillateur harmonique. Pour simplifier les notations, on va traiter ce cas en notation complexe, en prenant soin de normaliser les coordonnées de la même façon que dans le cas général. On note donc  $z = q/q_0 + ip/p_0$  avec  $p_0 = \sqrt{m\omega} = 1/q_0$ . Le hamiltonien associé s'écrit alors  $H = \omega|z|^2/2$ . Nous allons considérer l'influence d'une non-linéarité sous la forme d'une modification générique du type :  $H = \omega(1 + \gamma|z|^2/2) |z|^2/2$ .

Les équations de Hamilton peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial z} = -i\frac{p_0 q_0}{2} \dot{z}^* = \frac{\omega}{2}(1 + \gamma|z|^2)z^* \\ \frac{\partial H}{\partial z^*} = i\frac{p_0 q_0}{2} \dot{z} = \frac{\omega}{2}(1 + \gamma|z|^2)z \end{cases}$$

Les solutions de l'équation du mouvement sont simplement  $z(t) = z_0 e^{-i\omega(1+\gamma|z_0|^2)t}$ . On notera que cette perturbation conserve l'énergie du système (car  $d|z|^2/dt = 0$ ), mais la non-linéarité engendre la perte de l'isochronisme de l'oscillateur. On peut représenter graphiquement le mouvement des oscillateurs dans l'espace des phases comme des cercles concentriques dont le rayon dépend des conditions initiales. Ainsi, dans le cas de l'oscillateur harmonique l'ensemble des trajectoires se déplace dans une sorte de rotation solide puisqu'elles ont toutes la même vitesse angulaire  $\omega$ . Au contraire, dans le cas de l'oscillateur non-linéaire, la fréquence  $\omega(1 + \gamma|z_0|^2)$  dépend de l'énergie initiale et induit une dispersion en phase des trajectoires. La figure 3.1 représente la trajectoire de deux oscillateurs d'énergie initiale différente pour chacun des systèmes considérés.

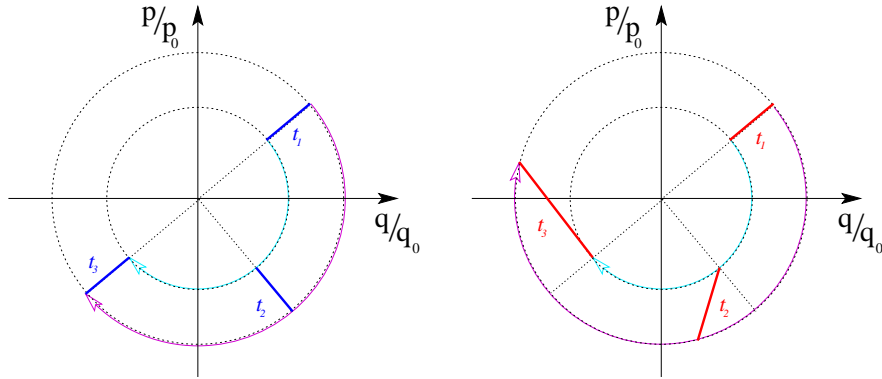


FIGURE 3.1 – Trajectoires (cercles en pointillé) de deux oscillateurs harmoniques (à gauche) et anharmoniques (à droite) dans l'espace des phases normalisé. En trait gras est représentée la distance entre deux oscillateurs aux instants  $t_1 < t_2 < t_3$  : la non-linéarité entraîne la perte de l'isochronisme.

On peut écrire l'équation de Liouville pour ce système comme :

$$\partial_t P + \partial_z(\dot{z}P) = 0$$

et vérifier que la probabilité  $P = e^{-\beta H}$  associée est bien une probabilité stationnaire. Cette probabilité représente la distribution des conditions initiales de l'oscillateur. Définissons maintenant la fonction de corrélation  $\Delta_{zz^*}(t)$  de  $z(t)$  à la condition initiale  $z_0^*$  et la fonction de réponse

$S_{zz_0}(t)$  de  $z(t)$  à la variation de la condition initiale  $z_0$ . Les intégrales sur des nombres complexes doivent être comprises comme des intégrations dans l'espace des phases, en notant que le produit extérieur se réécrit  $dz \wedge dz_0^* = \alpha dx_0 \wedge dy_0$  :

$$\Delta_{zz_0^*}(t) = \int \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} P(z_0) z(t) z_0^* dz_0 \wedge dz_0^* \quad , \quad S_{zz_0}(t) = \int \int_{\mathbb{R}^2} P(z_0) \frac{\partial z(t)}{\partial z_0} dz_0 \wedge dz_0^*$$

La fonction de réponse peut être réécrite en effectuant une intégration par partie, et on fait apparaître la dérivée temporelle de la fonction de corrélation :

$$\begin{aligned} S_{zz_0}(t) &= - \int \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial P(z_0)}{\partial z_0} z(t) dz_0 \wedge dz_0^* \\ &= - \int \int_{\mathbb{R}^2} \left( -\frac{\beta\omega}{2} (1 + \gamma|z_0|^2) z_0^* \right) P(z_0) z(t) dz_0 \wedge dz_0^* \\ &= i \frac{\beta p_0 q_0}{2} \int \int_{\mathbb{R}^2} P(z_0) z_0^* \dot{z}(t) dz_0 \wedge dz_0^* \\ &= i \frac{\beta p_0 q_0}{2} \dot{\Delta}_{zz_0^*}(t) . \end{aligned} \quad (3.13)$$

On peut montrer également que :

$$\begin{aligned} S_{z^*z_0^*}(t) &= -i \frac{\beta p_0 q_0}{2} \dot{\Delta}_{z^*z_0^*}(t) , \\ S_{zz_0^*}(t) &= i \frac{\beta p_0 q_0}{2} \dot{\Delta}_{zz_0^*}(t) , \\ S_{z^*z_0}(t) &= -i \frac{\beta p_0 q_0}{2} \dot{\Delta}_{z^*z_0}(t) . \end{aligned} \quad (3.14)$$

On peut vérifier que ces équations donnent le même résultat que le calcul général formulé dans la section précédente. À cet effet, il faut écrire les fonctions de réponse et de corrélation en fonction des variables réelles  $x = q/q_0$  et  $y = p/p_0$ , en notant que la probabilité stationnaire conserve la même forme et que le produit extérieur se réécrit  $dz \wedge dz_0^* = \alpha dx_0 \wedge dy_0$ . Pour les fonctions de corrélations :

$$\dot{\Delta}_{zz_0^*} = \alpha [(\dot{\Delta}_{xx_0} + \dot{\Delta}_{yy_0}) + i(\dot{\Delta}_{yx_0} - \dot{\Delta}_{xy_0})] .$$

Compte tenu du fait que  $q$  et  $p$  sont en quadrature pour l'oscillateur, les fonctions de corrélation vérifient les égalités :  $\dot{\Delta}_{xx_0} = \dot{\Delta}_{yy_0}$  et  $\dot{\Delta}_{yx_0} = -\dot{\Delta}_{xy_0}$ . On en déduit que :

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_{zz_0^*} &= \alpha [2\dot{\Delta}_{xx_0} + 2i\dot{\Delta}_{yx_0}] , \\ \dot{\Delta}_{z^*z_0} &= \alpha [2\dot{\Delta}_{xx_0} - 2i\dot{\Delta}_{yx_0}] , \\ \dot{\Delta}_{zz_0} &= \dot{\Delta}_{z^*z_0^*} = 0 . \end{aligned}$$

Par ailleurs pour les fonctions de réponse :

$$\begin{aligned} S_{zz_0} &= \alpha/2 [(S_{xx_0} + S_{yy_0}) + i(S_{yx_0} - S_{xy_0})] , \\ S_{z^*z_0} &= \alpha/2 [(S_{xx_0} - S_{yy_0}) - i(S_{yx_0} + S_{xy_0})] , \\ S_{zz_0^*} &= \alpha/2 [(S_{xx_0} - S_{yy_0}) + i(S_{yx_0} + S_{xy_0})] , \\ S_{z^*z_0^*} &= \alpha/2 [(S_{xx_0} + S_{yy_0}) - i(S_{yx_0} - S_{xy_0})] . \end{aligned}$$

Compte tenu de la nullité de certaines fonctions de réponse ( $S_{z^*z_0}$  et  $S_{zz_0^*}$  car  $\dot{\Delta}_{zz_0} = 0 = \dot{\Delta}_{z^*z_0^*}$ ) on déduit des équations précédentes que  $S_{xx_0} = S_{yy_0}$  et que  $S_{yx_0} = -S_{xy_0}$ . D'où :

$$S_{zz_0} = \alpha[S_{xx_0} + iS_{yx_0}] = i\frac{\beta p_0 q_0}{2}\dot{\Delta}_{zz_0^*}(t) = i\alpha\frac{\beta p_0 q_0}{2}[2\dot{\Delta}_{xx_0} + 2i\dot{\Delta}_{yx_0}] .$$

Ce qui amène la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} S_{xx_0} & S_{xy_0} \\ S_{yx_0} & S_{yy_0} \end{pmatrix} = \beta p_0 q_0 \begin{pmatrix} -\dot{\Delta}_{yx_0} = \dot{\Delta}_{xy_0} & -\dot{\Delta}_{xx_0} \\ \dot{\Delta}_{xx_0} = \dot{\Delta}_{yy_0} & -\dot{\Delta}_{yx_0} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

qui est bien identique à la relation générale dans le cas d'un système constitué d'une seule particule :

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \beta p_0 q_0 \begin{pmatrix} \dot{\Delta}_{12} & -\dot{\Delta}_{11} \\ \dot{\Delta}_{22} & -\dot{\Delta}_{21} \end{pmatrix} . \quad (3.16)$$

Observons finalement les fonctions de corrélation  $\Delta_{xy_0}$  entre impulsion et position de ces oscillateurs (figure 3.2). Dans le cas de l'oscillateur harmonique elle est simplement périodique. Dans le cas d'un oscillateur non-linéaire, on retrouve une fréquence propre de l'oscillateur mais on remarque que la fonction de corrélation tend vers 0 aux temps longs : ceci est l'effet de la non-linéarité sur la fréquence des oscillateurs. La dispersion en phase engendrée suffit à décorréler les trajectoires aux temps longs.

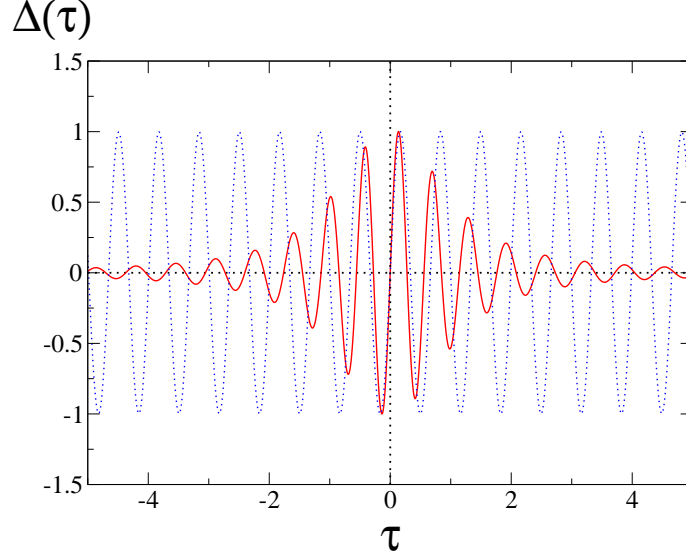


FIGURE 3.2 – Fonction de corrélation  $\Delta_{xy_0}$  entre position et impulsion avec  $\beta = 8 \cdot 10^{-3}$ ,  $\omega_0 = 6\pi$ , pour l'oscillateur harmonique (en pointillé bleu,  $\gamma = 0$ ) et anharmonique (trait plein rouge,  $\gamma = 10^{-2}$ ).



### 3.3.3 Cas des équilibres absolus

Nous allons démontrer que l'on peut établir une relation de Fluctuation-Dissipation dans le cas des équations de Burgers et d'Euler tronquées spectralement. À cet effet, nous serons amenés à séparer les parties réelles et imaginaires des variables complexes, ces dernières restant des variables de choix pour l'expression condensée des résultats analytiques.

#### Cas des équations de Burgers tronquées

De la même façon que dans le cas de l'oscillateur, on va séparer parties réelle et imaginaire des modes de Fourier du champ de vitesse  $q_j = a_j + i b_j$  pour définir l'élément d'intégration  $d\mu = \prod_{j=1}^{k_{\max}} da_j db_j$  (compte tenu du fait que les modes de Fourier du champ de vitesse réel vérifient  $q_j^* = q_{-j}$ , soit  $a_{-j} = a_j$  et  $b_{-j} = -b_j$ ). L'élément d'intégration sur les conditions initiales du champ de vitesse est alors noté  $d\mu^0$ . Dans le cadre des équilibres absolus, on peut écrire les fonctions de réponse et de corrélation comme :

$$\mathbf{S}_{ij}(t) = \int P \frac{\partial q_i}{\partial q_j^0} d\mu^0 \quad , \quad \Delta_{ij}(t) = \int P q_i q_j^0 d\mu^0 \quad ,$$

$$\text{où } P = \mathcal{N} \exp[-\beta E] \quad \text{avec } E = \sum_{\alpha=-k_{\max}}^{k_{\max}} \frac{q_\alpha q_{-\alpha}}{2} = \sum_{\alpha=1}^{k_{\max}} a_\alpha^2 + b_\alpha^2 \quad (3.17)$$

est une probabilité stationnaire. En procédant à une intégration par parties sur  $S_{ij}$ , on obtient :

$$\mathbf{S}_{ij}(t) = - \int q_i \frac{\partial P}{\partial q_j^0} d\mu^0 = \beta \int q_i q_{-j}^0 P d\mu^0 \quad .$$

On obtient finalement une relation Fluctuation-Dissipation de la forme :

$$\mathbf{S}_{ij} = \beta \Delta_{i-j} \quad . \quad (3.18)$$

#### Cas des équations d'Euler tronquées

Le cas des équations d'Euler tronquées spectralement présente une petite difficulté supplémentaire parce que le champ de vitesse est de divergence nulle. En écrivant les modes de Fourier du champ de vitesse  $\hat{u}_\nu(\mathbf{k}, t) = \hat{a}_\nu(\mathbf{k}, t) + i \hat{b}_\nu(\mathbf{k}, t)$ , la nullité de la divergence du champ de vitesse s'écrit  $k_\nu \hat{a}_\nu(\mathbf{k}, t) = k_\nu \hat{b}_\nu(\mathbf{k}, t) = 0$ . On montre (dans la référence [2], éq. (5-16), p 327) qu'on peut alors introduire deux vecteurs unitaires orthogonaux  $\mathbf{n}_1(\mathbf{k})$ ,  $\mathbf{n}_2(\mathbf{k})$  définissant un plan de normale  $\mathbf{k}$  sur lequel on projette  $\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{k}, t)$  et  $\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k}, t)$ , pour  $r = 1, 2$  :  $a_r(\mathbf{k}, t) = \mathbf{n}_r(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{k}, t)$  et  $b_r(\mathbf{k}, t) = \mathbf{n}_r(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k}, t)$ . Le choix des vecteurs peut correspondre aux coordonnées sphériques.

D'autre part, le champ de vitesse étant réel,  $\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{k}, t) = \hat{\mathbf{a}}(-\mathbf{k}, t)$  et  $\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k}, t) = -\hat{\mathbf{b}}(-\mathbf{k}, t)$ . L'ensemble  $I_{k_{\max}} = \{\mathbf{k} \mid \sup_\alpha |k_\alpha| \leq k_{\max} \text{ et } (k_x \geq 0 \text{ ou } (k_x = 0, k_y \geq 0) \text{ ou } (k_x = k_y = 0, k_z \geq 0))\}$  permet de construire un ensemble de composantes indépendantes  $\{a_r(\mathbf{k}, t), b_r(\mathbf{k}, t) \mid \mathbf{k} \in I_{k_{\max}}, r = 1, 2\}$ . L'élément de volume de l'espace des phases s'écrit :

$$d\mu = \prod_{\mathbf{k} \in I_{k_{\max}}} \prod_{r=1}^2 da_r(\mathbf{k}, t) db_r(\mathbf{k}, t) \quad . \quad (3.19)$$

On peut montrer [2] que cet élément de volume est conservé au cours du temps (vérification du théorème Liouville), et que l'énergie

$$E = \sum_{\mathbf{k} \in I_{k_{\max}}} \sum_{r=1}^2 [a_r(\mathbf{k}, t)^2 + b_r(\mathbf{k}, t)^2] , \quad (3.20)$$

est conservée par l'équation (2.4). On peut ainsi construire une probabilité stationnaire

$$P = \mathcal{N} \exp(-\beta E) . \quad (3.21)$$

En notant  $\{q_i \mid i \leq 16k_{\max}^3\} = \{a_r(\mathbf{k}, t), b_r(\mathbf{k}, t) \mid \mathbf{k} \in I_{k_{\max}}, r = 1, 2\}$  et en réécrivant l'énergie  $E = \sum_{i \leq 16k_{\max}^3} q_i^2$  on peut démontrer une relation de Fluctuation-Dissipation du type précédent entre les fonctions de réponse et les fonctions de corrélations suivantes :

$$\mathbf{S}_{ij}(t) = \int P \frac{\partial q_i}{\partial q_j^0} d\mu^0 , \quad \Delta_{ij}(t) = \int P q_i q_j^0 d\mu^0 , \quad (3.22)$$

avec  $P = \mathcal{N} \exp[-\beta q_i q_i]$  comme probabilité stationnaire. En procédant à une intégration par parties sur  $S_{ij}$ , on obtient :

$$\mathbf{S}_{ij}(t) = - \int q_i \frac{\partial P}{\partial q_j^0} d\mu^0 = 2\beta \int q_i q_j^0 P d\mu^0 = 2\beta \Delta_{ij} . \quad (3.23)$$

Les  $a_r(\mathbf{k}, t)$ ,  $b_r(\mathbf{k}, t)$  sont obtenus à partir de la projection sur des  $\hat{u}_\nu(\mathbf{k}, t)$  sur une base orthonormale, et leur sont donc liés par des relations linéaires. Il est donc possible d'écrire une relation de Fluctuation-Dissipation entre les fonctions de réponse des  $\hat{u}_\nu(\mathbf{k}, t)$  et leurs fonctions de corrélation. C'est cette seule démonstration d'existence qui nous importe, et nous ne chercherons pas à écrire explicitement une telle relation (qui serait un peu technique à établir). En effet, nous nous intéresserons exclusivement aux fonctions de corrélations dans la suite.

À ce titre, nous pouvons exposer ici le calcul de la corrélation moyenne de deux composantes des modes de Fourier du champ de vitesse,  $\langle \hat{u}_\mu(\mathbf{k}, t) \hat{u}_\nu(-\mathbf{k}, t) \rangle$ , où  $\langle X \rangle = \int X P d\mu$  est la moyenne sous la probabilité  $P$  (éq. 3.21). Le principe de ce calcul est de se ramener aux  $a_r(\mathbf{k}, t)$ ,  $b_r(\mathbf{k}, t)$  dont les corrélations moyennes sont faciles à calculer sous la probabilité  $P$  :

$$\langle \hat{u}_\mu(\mathbf{k}, t) \hat{u}_\nu(-\mathbf{k}, t) \rangle = \langle (\hat{a}_\mu(\mathbf{k}, t) + i\hat{b}_\mu(\mathbf{k}, t)) (\hat{a}_\nu(\mathbf{k}, t) - i\hat{b}_\nu(\mathbf{k}, t)) \rangle .$$

Les éléments de la partie imaginaire sont tous nuls : en effet,  $\langle \hat{a}_\mu(\mathbf{k}, t) \hat{b}_\nu(\mathbf{k}, t) \rangle$  donne des termes croisés en  $\langle a_i b_j \rangle$  qui sont nuls sous la probabilité gaussienne des  $a_i$ ,  $b_j$  (éq. 3.21). Comme  $\langle \hat{a}_\mu(\mathbf{k}, t) \hat{a}_\nu(\mathbf{k}, t) \rangle = \langle \hat{b}_\mu(\mathbf{k}, t) \hat{b}_\nu(\mathbf{k}, t) \rangle$  il reste :

$$\langle \hat{u}_\mu(\mathbf{k}, t) \hat{u}_\nu(-\mathbf{k}, t) \rangle = 2\langle \hat{a}_\mu(\mathbf{k}, t) \hat{a}_\nu(\mathbf{k}, t) \rangle .$$

Ayant construit  $(\mathbf{k}/|\mathbf{k}|, \mathbf{n}_1(\mathbf{k}), \mathbf{n}_2(\mathbf{k}))$  de façon qu'il corresponde au trièdre des coordonnées sphériques, on a  $\mathbf{k} = |\mathbf{k}|(\cos \phi \sin \theta \mathbf{n}_x + \sin \phi \sin \theta \mathbf{n}_y + \cos \theta \mathbf{n}_z) = k_x \mathbf{n}_x + k_y \mathbf{n}_y + k_z \mathbf{n}_z$ . On écrit  $\hat{a}_\mu(\mathbf{k}, t) = \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{k}, t) \cdot \mathbf{n}_\mu$  en fonction des  $a_r(\mathbf{k}, t)$  :

$$\begin{aligned} \hat{a}_x(\mathbf{k}, t) &= \cos \phi \cos \theta a_1(\mathbf{k}, t) - \sin \phi a_2(\mathbf{k}, t) , \\ \hat{a}_y(\mathbf{k}, t) &= \cos \theta \sin \phi a_1(\mathbf{k}, t) + \cos \phi a_2(\mathbf{k}, t) , \\ \hat{a}_z(\mathbf{k}, t) &= -\sin \theta a_1(\mathbf{k}, t) . \end{aligned}$$

$\langle \hat{a}_\mu(\mathbf{k}, t) \hat{a}_\nu(\mathbf{k}, t) \rangle$  donne des combinaisons linéaires de  $\langle a_1 a_1 \rangle = \langle a_2 a_2 \rangle = 1/(2\beta)$  et de  $\langle a_1 a_2 \rangle = 0$ . Les préfacteurs sont des produits de fonctions trigonométriques directement exprimables en fonction des composantes de  $\mathbf{k}$ . Si  $\mu \neq \nu$ , le préfacteur s'écrit  $-k_\mu k_\nu/k^2$ . Si  $\mu = \nu$ , l'indice répété indique qu'on effectue une somme correspondant à la somme des carrés des composantes des vecteurs  $\mathbf{n}_1(\mathbf{k})$ ,  $\mathbf{n}_2(\mathbf{k})$ , soit un préfacteur qui vaut 2. En résumé, on écrit que :

$$\langle \hat{u}_\mu(\mathbf{k}, t) \hat{u}_\nu(-\mathbf{k}, t) \rangle = \frac{1}{\beta} (\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/k^2) = \frac{1}{\beta} P_{\mu\nu}(\mathbf{k}) . \quad (3.24)$$

### 3.3.4 Discussion

Pour conclure ce chapitre, remarquons qu'on distingue en général deux grands types de théorèmes de Fluctuation-Dissipation, suivant que suite à une perturbation le système relaxe vers son équilibre de base, ou qu'au contraire la perturbation extérieure ait causé un changement de l'équilibre même vers lequel le système relaxe. Les cas considérés dans ce chapitre sont clairement du premier type par unicité de l'équilibre envisagé.

Une particularité des relations de Fluctuation-Dissipation envisagées ici est l'absence de bruit extérieur. Comme nous l'avons illustré par l'exemple de l'oscillateur, la relaxation est causée non pas par un bruit extérieur (il n'y en a pas), mais par la dynamique non-linéaire elle-même : la dispersion des trajectoires due à la variation de fréquence avec l'amplitude de l'oscillateur suffit à elle seule à induire le déclin de la fonction de corrélation. L'unique aspect stochastique dans ce modèle est la distribution stationnaire des conditions initiales. Par rapport aux relations FD traditionnelles [50] établis en présence d'un bruit blanc extérieur et d'un terme dissipatif, la présente relation de FD serait obtenue dans la limite de bruit extérieur nul.

## Chapitre 4

# Calcul et estimation des temps de dé-corrélation

Le but de ce chapitre est d'évaluer les temps de relaxation au voisinage d'un équilibre absolu par méthode Monte-Carlo. Afin d'éclairer l'exposé, nous allons dans un premier temps nous intéresser au système simple des équations de Burgers unidimensionnelles. Ce travail est le fruit d'une collaboration avec Pauline Bonaiti, étudiante de Maitrise. Nous poursuivons ensuite sur les équations d'Euler 3D.

Notre objectif est donc de caractériser l'évolution temporelle des fonctions de réponse dans le cas d'un équilibre absolu. Les résultats du chapitre précédent permettent de ramener ce travail à l'étude des fonctions de corrélation par le biais du théorème Fluctuation-Dissipation. Les calculs de fonction de corrélation nécessitent usuellement une intégration pour des temps très longs, ce qui conduit à un stockage de données excessif à 3D. On s'appuie donc sur l'hypothèse d'ergodicité selon laquelle une intégration sur le temps revient à faire une moyenne sur un ensemble de systèmes répartis suivant une probabilité stationnaire. On utilise alors une méthode Monte-Carlo (voir annexe) pour tirer aléatoirement différentes conditions initiales selon la probabilité stationnaire. On effectue alors un grand nombre de réalisations, ce qui consiste à intégrer les équations sur un temps court pour une condition initiale aléatoire fixée. D'autre part, les fonctions de corrélations sont moyennées au vol à chaque réalisation, ce qui permet de ne garder en mémoire que l'équivalent en taille d'une seule réalisation. Le code est ainsi optimisé de façon à rendre possible une étude détaillée pour Burgers 1D, et une étude à résolution suffisante pour Euler 3D.

Dans un premier temps, nous présentons les résultats obtenus numériquement pour les équations de Burgers. Le cadre théorique introduit dans le chapitre précédent nous permet de procéder au calcul analytique des fonctions de corrélation au voisinage de leur maximum. Le résultat sera ensuite discuté, en regard des résultats numériques. Dans un second temps, nous procédons directement au calcul analytique dans le cas d'Euler 3D, avant d'exposer les résultats obtenus numériquement. Le cas Euler s'avère un peu plus complexe que le cas Burgers, révélant deux temps caractéristiques pour les fonctions de corrélation. Nous discuterons finalement une loi empirique caractérisant la décorrélation des modes dans le cas des équilibres absolus des équations tri-dimensionnelles incompressibles d'Euler.

## 4.1 Équation de Burgers inviscide unidimensionnelle

### 4.1.1 Étude des fonctions de corrélation

On dispose d'un programme capable de calculer régulièrement la fonction de corrélation pour un système obéissant à l'équation de Burgers à une dimension intégrée dans le cadre d'une méthode Monte-Carlo (voir annexe) : cela consiste à générer conditions initiales aléatoires réparties selon une probabilité stationnaire, et calculer les fonctions de corrélations des composantes spectrales de la vitesse pour chaque coquille  $k$ . La température est un paramètre du code.

On est ainsi capable de visualiser l'allure de ces fonctions de corrélation pour chaque nombre d'onde  $k$ , comme présenté sur la partie gauche de la figure 4.1.

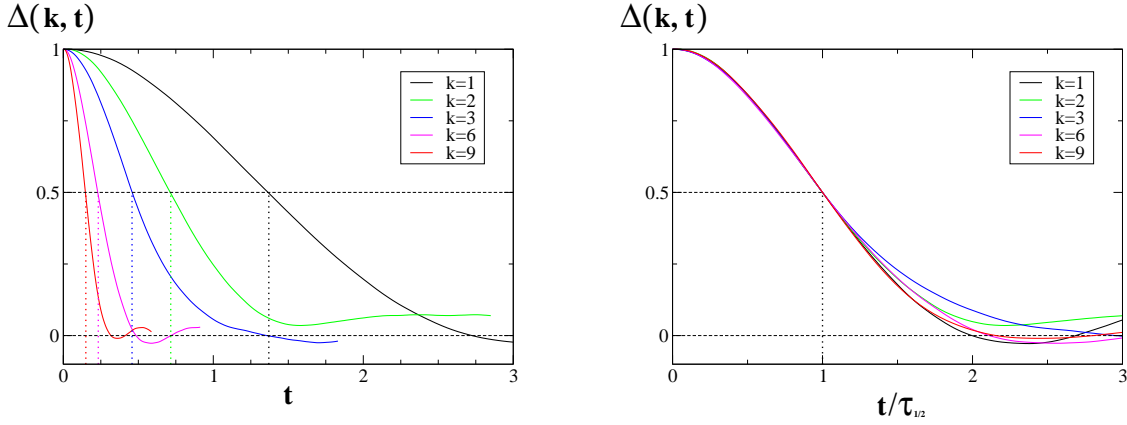


FIGURE 4.1 – **Gauche** : fonctions de corrélation pour différents nombres d'onde  $k$  en fonction du temps  $t$ . **Droite** : fonctions de corrélation en fonction du temps adimensionné  $t/\tau_{1/2}$ .

On peut remarquer que les différentes courbes semblent avoir la même allure, et il semble que le temps de corrélation soit une fonction décroissante du nombre d'onde. On mesure  $\tau_{1/2}$ , le temps à mi-hauteur de la fonction de corrélation tel que :

$$\Delta(k, \tau_{1/2}) = \frac{1}{2} \quad (4.1)$$

Pour cela, on mesure la largeur de la courbe à mi-hauteur à l'aide d'une interpolation numérique. Cependant, il est important de remarquer qu'à grand  $k$ , la fonction de corrélation décroît très rapidement. De ce fait le nombre de points présents dans la zone à interpoler devient très petit et rend la procédure d'interpolation inefficace. Ce défaut pourrait être résolu en calculant les fonctions de corrélation plus souvent, cependant une telle modification entrainerait un allongement important du temps de calcul. De plus, en dehors de ce problème numérique, on peut s'attendre à d'autres défauts pouvant toucher les modes à grand  $k$ . Les plus petits modes interagissent par le couplage non-linéaire avec des modes plus élevés, ce qui n'est pas le cas des grands modes à cause de la coupure spectrale. Ainsi, notre étude se concentrera aux valeurs  $k \ll k_{max}$ , et on établira un critère d'exclusion par la suite.

Les fonctions de corrélation sont représentées sur la partie droite de la figure 4.1 en fonction du temps adimensionné par  $\tau_{1/2}$ . On peut voir que les courbes se superposent parfaitement jusqu'à décorrélation. Une étude des temps de corrélation a déjà été exposée par Majda [51; 52] qui propose un temps de corrélation inversement proportionnel à  $k$  tel que :

$$\tau_M = \frac{A}{k\sqrt{T}} \quad (4.2)$$

où "A est une constante dépendant faiblement de la résolution" et T est la température. On rappelle que l'énergie est conservée lors de nos simulations. On montrera plus loin (équation 4.16) que  $E = k_{max} T$ , ce qui implique que la température  $T$  est constante pour toute la durée des simulations. Nous avons tenté de vérifier la relation (4.2). La décroissance en  $k$  est montrée sur la figure 4.2.

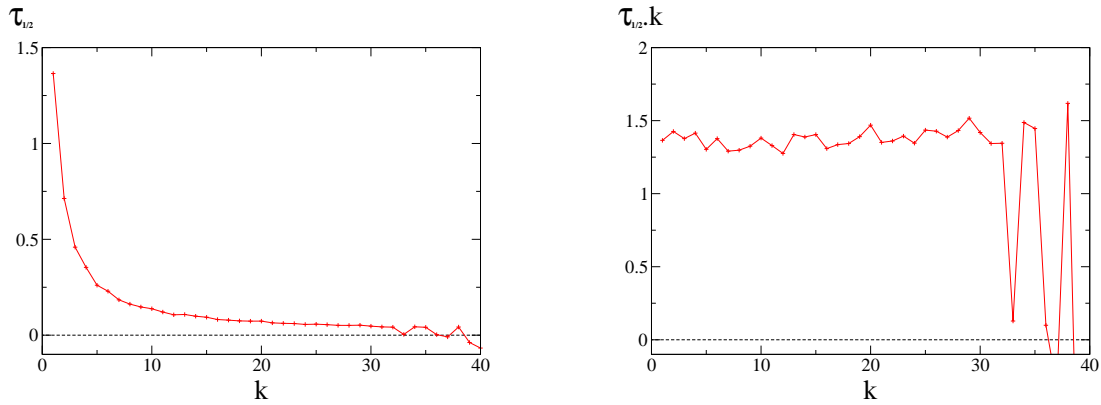


FIGURE 4.2 – Temps de corrélation mesuré  $\tau_{1/2}$  (à gauche) et  $k \tau_{1/2}$  (à droite) en fonction de  $k$ .

La figure 4.2 confirme la dépendance de  $\tau_{1/2}$  en  $\frac{1}{k}$  et peut laisser penser que la théorie de Majda est pleinement vérifiée. Cependant, une étude paramétrique plus poussée nous a permis d'en proposer une reformulation. En effet le produit  $\tau_{1/2} k \sqrt{T} = A$  devrait dépendre faiblement de la résolution.

La partie gauche de la figure 4.3 représente le produit  $\tau_{1/2} k \sqrt{T}$  pour différentes résolutions. Il apparaît clairement que la constante varie bien plus avec la résolution que (4.2) ne le laissait penser, et avec une certaine régularité. Essayons donc de remplacer dans la relation de Majda la température par l'énergie, qui croît linéairement avec  $k_{max}$  dans ce problème à 1D (équation 4.16), et donc avec la résolution.

La partie droite de la figure 4.3 révèle une constante ne dépendant ni de la température ni de la résolution. On peut donc remplacer l'équation (4.2) par la suivante :

$$\tau_M = \frac{C_B}{k\sqrt{E}} \quad (4.3)$$

où la constante  $C_B$  ne dépend plus aucunement de la résolution. On dispose pour estimer cette constante d'un grand nombre de runs (dont certains apparaissent sur la figure 4.3). On se propose donc de mettre en place une méthode de calcul pour en tirer une estimation de  $C_B$ .

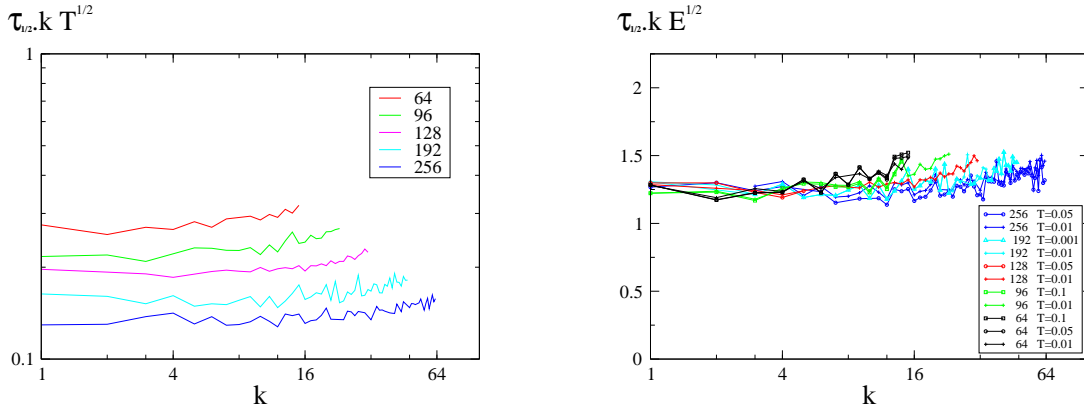


FIGURE 4.3 – **Gauche** :  $\tau_{1/2} k \sqrt{T}$  en fonction du nombre d'onde  $k$  pour différentes résolutions (échelle logarithmique en ordonnée). **Droite** :  $\tau_{1/2} k \sqrt{E}$  en fonction du nombre d'onde  $k$  pour différentes résolutions et températures.

Pour cela, nous devons imposer des critères de validité des résultats. D'abord, comme nous l'avons dit au début de ce paragraphe, certaines valeurs de  $\tau_{1/2}$  sont visiblement mal interpolées par la procédure automatisée. Ces points ne figurent pas sur les graphiques par soucis de clarté visuelle : il est facile de les réfuter à partir de l'observation directe de la fonction de corrélation à laquelle ils sont associés. Nous déciderons donc de ne prendre en compte que les valeurs de la constante située dans un intervalle de valeurs convenable. On peut voir à l'oeil nu que ces valeurs se situent entre 1 et 1.5.

Tâchons d'envisager d'autres origines d'erreurs possibles. D'une part, il existe des erreurs dues à l'interpolation. En effet, la fréquence d'échantillonnage étant fixée, le nombre de points d'interpolation diminue avec  $k$  puisqu'il est proportionnel à  $\tau_{1/2}$ . Vu l'équation (4.3), l'erreur relative d'interpolation (en  $\frac{1}{\tau_{1/2}}$ ) est proportionnelle à  $k$  : on constate effectivement que la dispersion des points augmente avec  $k$  (voir figure 4.3). Ces erreurs peuvent être considérées comme aléatoires et seront minimisées en se restreignant aux faibles valeurs de  $k$ .

D'autre part, on peut remarquer (équ.(3.5)) que le couplage entre les modes se fait par convolution. Mais compte tenu de la coupure spectrale, tous les modes n'interagissent pas avec le même nombre de modes. On peut alors décider d'établir un critère de mesure pour la constante. Établissons donc comme critère de validité que pour être significatif, un mode  $k$  doit subir l'influence de modes au moins deux fois égaux à lui-même. C'est-à-dire :  $k + 2k < k_{max}$ . Par conséquent, on ne considérera que les nombres d'onde allant jusqu'à  $\frac{k_{max}}{3}$ . En considérant tous ces critères de validité, on arrive à l'estimation suivante :

$$C_B \sim 1.286$$

### 4.1.2 Calcul analytique des temps de corrélation

L'estimation précédente reste une approximation. En effet d'un point de vue analytique, nous allons montrer dans ce paragraphe que l'on peut calculer cette constante  $C_B$  en considérant que la fonction de corrélation a un comportement parabolique, ce qui ici est valable au voisinage de l'origine. On peut définir le temps de corrélation comme :

$$\tau_C = \left[ \frac{\Delta(t)}{-\frac{d^2}{dt^2} \Delta(t)} \right]_{t=0}^{\frac{1}{2}}. \quad (4.4)$$

En utilisant les notations introduites au paragraphe 3.3, on peut écrire la fonction de corrélation comme :

$$\Delta_{il}(t) = \langle q_i(t) q_l(0) \rangle \quad \text{avec} \quad \langle X \rangle = \int X P d\mu. \quad (4.5)$$

Écrivons la dérivée seconde en temps de la fonction de corrélation en zéro :

$$\ddot{\Delta}_{il}(0) = \frac{d^2}{dt^2} \left[ \langle q_i(t) q_l(0) \rangle \right]_{t=0} = -\frac{d}{dt} \frac{d}{dt'} \left[ \langle q_i(t) q_l(t') \rangle \right]_{t=t'=0},$$

car la fonction de corrélation est invariante par translation de l'origine des temps  $t'$ , et ne dépend que de  $t - t'$  (équ. 3.11). En introduisant la relation (3.5), on obtient :

$$\ddot{\Delta}_{il}(0) = -\langle \epsilon_{ijk} q_j q_k \epsilon_{lmn} q_m q_n \rangle = -\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} \langle q_j q_k q_m q_n \rangle. \quad (4.6)$$

Le calcul du moment d'ordre 4 d'un champs gaussien est bien connu ([53], [32]), et nous nous proposons de le rappeler dans le cas d'une suite de variables aléatoires réelles gaussiennes  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_K)$  réparties suivant la probabilité  $P_g = \mathcal{N} \exp \left[ -x_i x_i / \beta \right]$ . La probabilité stationnaire  $P_g$  est un produit de gaussiennes. On calcule sa transformée de Fourier qui est la fonction génératrice :

$$Z(\mathbf{u}) = \int e^{i\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}} P_g d\mu = \exp \left[ -\frac{u_i u_i}{4\beta} \right].$$

Etant donné que  $\beta = 1/T$ , on définit la matrice de covariance  $\Gamma$  à partir des dérivées d'ordre 2 de la fonction génératrice :

$$\left. \frac{\partial^2 Z(\mathbf{u})}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} \right|_{\mathbf{u}=\vec{0}} = -\delta_{(\alpha-\beta)} \frac{T}{2} = -\langle x_\alpha x_\beta \rangle = -\Gamma_{\alpha\beta}. \quad (4.7)$$

On notera que l'on peut réécrire  $Z(\mathbf{u})$  en fonction des éléments de la matrice  $\Gamma$  :

$$Z(\mathbf{u}) = \exp \left[ -\frac{u_i \Gamma_{ij} u_j}{2} \right]. \quad (4.8)$$

Les moments d'ordre 4 s'expriment en fonction des dérivées partielles d'ordre 4 :

$$\left. \frac{\partial^4 Z(\mathbf{u})}{\partial u_j \partial u_k \partial u_m \partial u_n} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}} = \langle x_j x_k x_m x_n \rangle. \quad (4.9)$$

Afin de relier les moments d'ordre 4 aux moments d'ordre 2, nous allons démontrer une propriété utile. Pour un polynôme  $W$  fixé et une fonction  $g$  donnée développable en série :

$$\left. W \left( \frac{\partial}{\partial u_p} \right) g(\mathbf{u}) \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}} = g \left( \frac{\partial}{\partial x_p} \right) W(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}. \quad (4.10)$$



En effet, comme  $\exp[\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}] \rightarrow 1$  quand  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}$  et que  $g$  est développable en série :

$$W\left(\frac{\partial}{\partial u_p}\right) g(\mathbf{u}) \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}} = W\left(\frac{\partial}{\partial u_p}\right) g(\mathbf{u}) \exp[\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}] \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}=\mathbf{x}} = W\left(\frac{\partial}{\partial u_p}\right) g\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) \exp[\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}] \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}=\mathbf{x}} .$$

Les dérivées commutent, et puisque  $W$  est un polynôme :

$$W\left(\frac{\partial}{\partial u_p}\right) g(\mathbf{u}) \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_p}\right) W\left(\frac{\partial}{\partial x_p}\right) \exp[\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}] \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}=\mathbf{x}} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_p}\right) W(\mathbf{x}) \exp[\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}] \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}=\mathbf{x}} ,$$

qui donne bien la propriété (4.10) étant donné que  $\exp[\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}] \rightarrow 1$  quand  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}$ .

Pour  $W = X_j X_k X_m X_n$  et  $g = Z$ , on applique cette propriété au membre de gauche de l'équation (4.9) :

$$\langle x_j x_k x_m x_n \rangle = \frac{\partial^4 Z(\mathbf{u})}{\partial u_j \partial u_k \partial u_m \partial u_n} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}} = \left[ \exp \left[ \frac{\Gamma_{\alpha\beta}}{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right] x_j x_k x_m x_n \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} .$$

En développant l'exponentielle en série, on constate que seul le deuxième terme agit sur le polynôme de façon non triviale :

$$\begin{aligned} \langle x_j x_k x_m x_n \rangle &= \left[ \frac{1}{2!} \left[ \frac{\Gamma_{\alpha\beta}}{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\Gamma_{\delta\gamma}}{2} \frac{\partial}{\partial x_\delta} \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \right] x_j x_k x_m x_n \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \\ &= \Gamma_{jk} \Gamma_{mn} + \Gamma_{jm} \Gamma_{kn} + \Gamma_{jn} \Gamma_{km} . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Cette équation a les bons facteurs ([32], p. 45), comme on peut le vérifier avec la relation  $\langle q^4 \rangle = 3 \langle q^2 \rangle^2$  dans le cas d'une unique variable aléatoire gaussienne. Démontrée dans le cas de variables aléatoires gaussiennes réelles, on peut directement transposer la relation (4.11) au cas de variables aléatoires complexes ( $q_j = a_j + i b_j$ ) dont les parties réelles ( $a_j$ ) et imaginaires ( $b_j$ ) sont identiquement distribuées par des gaussiennes (éq. 3.17), à condition de noter que  $a_{-j} = a_j$  et  $b_{-j} = -b_j$  (car le champ de vitesse est réel) et donc :

$$\langle q_j q_k q_m q_n \rangle = \sigma_{jk} \sigma_{mn} + \sigma_{jm} \sigma_{kn} + \sigma_{jn} \sigma_{km} , \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \text{où } \sigma_{jk} = \langle q_j q_k \rangle &= \langle (a_j + i b_j)(a_k + i b_k) \rangle = \langle a_j a_k \rangle - \langle b_j b_k \rangle \\ &= (\Gamma_{jk} + \Gamma_{j-k}) - (\Gamma_{jk} - \Gamma_{j-k}) \\ &= 2\Gamma_{j-k} = \delta(j+k) T . \end{aligned} \quad (4.13)$$

On peut enfin exprimer le membre de droite de l'équation (4.6) en fonction des  $\epsilon_{ijk}$  et  $\sigma_{jk}$  à l'aide des équations (3.5) :

$$\begin{aligned} \ddot{\Delta}_{il}(0) &= \frac{i}{2} \delta_{(i-j-k)} \frac{l}{2} \delta_{(l-m-n)} \left[ \sigma_{jk} \sigma_{mn} + \sigma_{jm} \sigma_{kn} + \sigma_{jn} \sigma_{km} \right] \\ &= i l \delta_{(i-j-k)} \delta_{(l-m-n)} \left[ \frac{1}{4} \delta_{(j+k)} \delta_{(m+n)} + \frac{1}{2} \delta_{(j+m)} \delta_{(k+n)} \right] T^2 \\ &= i l \left[ \frac{1}{4} \delta_{(i)} \delta_{(l)} + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \delta_{(i-j-k)} \delta_{(l+j+k)} \right] T^2 \\ &= i l \sum_{j,k} \frac{1}{2} \delta_{(i+l)} \delta_{(i-j-k)} T^2 \\ &= - \delta_{(i+l)} \frac{l^2}{2} (2k_{max} - l) T^2 . \end{aligned} \quad (4.14)$$

On remarquera que le rôle de la coupure dans ce calcul est de limiter le nombre de  $T^2$  qui seront pris en compte dans la somme.

Par ailleurs, si on injecte la relation (4.13) dans (4.5), on trouve (ce qui est cohérent avec le nombre de degré de liberté par mode  $q$ ) :

$$\Delta_{il}(0) = \delta_{(i+l)} T . \quad (4.15)$$

On peut ainsi évaluer l'expression (4.4) :

$$\tau_{\mathbf{C}}(i, l) = \delta_{(i+l)} \left( \frac{1}{l^2 (k_{max} - l/2) T} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Comme la relation (4.7) permet d'exprimer l'énergie totale en fonction de la température

$$E_{th} = \sum_{\alpha=1}^{k_{max}} \sigma_{\alpha\alpha} = k_{max} T , \quad (4.16)$$

on obtient une expression analytique des temps d'autocorrélation :

$$\tau_{\mathbf{C}}(k) = \tau_{\mathbf{C}}(k, -k) = \frac{1}{k} \cdot \sqrt{\frac{1}{E_{th} (1 - k/2k_{max})}} \quad (4.17)$$

$$\sim \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{E_{th}}} \cdot \left( 1 + \frac{k}{4k_{max}} \right) \quad \text{si } k \ll k_{max} . \quad (4.18)$$

### 4.1.3 Discussion

Cette dernière formule permet de rendre compte de différents effets observés sur les temps de corrélations  $\tau_{1/2}$  obtenus numériquement (figure 4.3) :

- la dépendance du temps de corrélation  $\tau_{1/2}$  par rapport au nombre d'onde  $k$  en  $1/k$
- la dépendance de  $\tau_{1/2}$  par rapport à l'énergie totale disponible en  $\sqrt{E_{th}}$
- la lente dérive de  $\tau_{1/2}$  par rapport à  $k/k_{max}$

Mais notre méthode de mesure du temps de corrélation présente un biais systématique : on mesure en effet le temps de corrélation comme la largeur à mi-hauteur d'une parabole. Cependant, l'approximation parabolique des fonctions de corrélations n'est valable qu'au voisinage de l'origine. Comme les fonctions de corrélations se superposent parfaitement (figure 4.1), on peut évaluer l'erreur systématique commise en considérant n'importe quelle fonction de corrélation. On va prendre la mieux échantillonnée.

La figure (4.4) représente la fonction de corrélation du plus petit mode ( $k = 1$ ) et l'interpolation parabolique déterminée à partir du calcul analytique. Il apparaît que la formule analytique (4.17) est compatible avec la fonction de corrélation obtenue numériquement au voisinage de l'origine. Cependant, il apparaît clairement que la fonction de corrélation s'écarte lentement d'un comportement parabolique et que l'estimation du temps de corrélation par  $\tau_{1/2}$  conduit à une surévaluation systématique (d'environ 20%). Cet écart correspond à la différence observée entre la constante  $C_B$  de (4.3) et le facteur 1 calculé quand  $k \rightarrow 0$  (équ. 4.17).

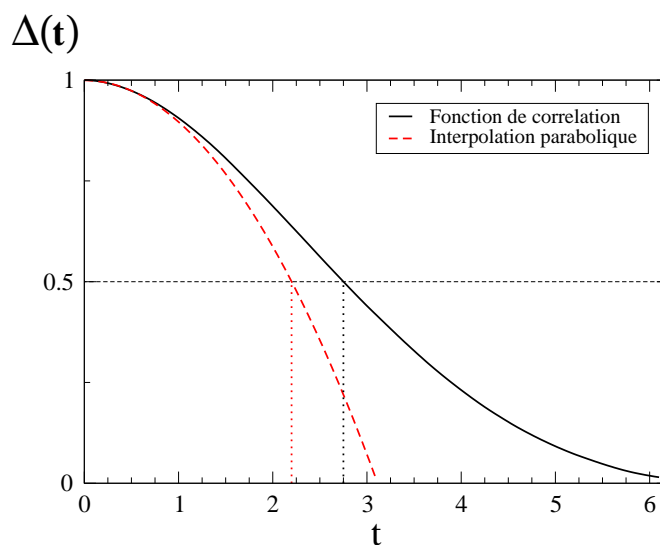


FIGURE 4.4 – Comparaison entre la fonction de corrélation et l'interpolation parabolique issue du calcul analytique.

Concluons donc que notre estimation numérique est en très bon accord avec le résultat analytique. Ce résultat pourrait être mis en regard de la dynamique de relaxation d'un écoulement singulier de Burgers, mais la dynamique de relaxation (figure 2.2) semble tellement rapide qu'il n'est pas évident que les temps caractéristiques ici obtenus pour un système à l'équilibre permettent de décrire convenablement la relaxation du bain thermique des équations tronquées de Burgers 1D.

## 4.2 Équation d'Euler tridimensionnelle incompressible

Nous allons effectuer le même type d'étude que dans le paragraphe précédent sur les équations d'Euler 3D tronquées, en essayant d'évaluer les temps de relaxation au voisinage de l'équilibre par méthode Monte-Carlo. Le code utilisé ici est un code périodique général, ce qui explique que les résolutions atteintes dans ce paragraphe sont moins élevées que pour l'étude effectuée dans les chapitres 1 et 2.

Nous procédons directement au calcul analytique, avant d'exposer les résultats obtenus numériquement. Le cas Euler s'avère un peu plus complexe que le cas Burgers, révélant deux temps caractéristiques pour les fonctions de corrélations. Nous discuterons finalement une loi empirique caractérisant la décorrélation des modes dans ce cas.

### 4.2.1 Calcul analytique des temps de corrélation

Nous avons vu dans le chapitre 2 que les équations d'Euler 3D incompressible pour un fluide de densité unitaire (équation 2.2) peuvent se ramener (voir annexe) à un nombre grand (mais fini) d'équations différentielles ordinaires en effectuant une troncature Galerkin ( $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = 0$  pour  $\sup_{\alpha} |k_{\alpha}| > k_{\max}$ ) sur le champ de vitesse  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$ . Le nombre fini de modes de Fourier de la vitesse obéissent ainsi à des équations discrètes 2.4.

Ce système est réversible en temps et conserve exactement l'énergie cinétique  $E_{\text{th}}$  définie par  $E_{\text{th}} = \sum_{\sup_{\alpha} |k_{\alpha}| \leq k_{\max}} E(k, t)$ , où le spectre d'énergie  $E(k, t)$  est défini par la moyenne des modes  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}', t)$  sur les coquilles sphériques de largeur  $\Delta k = 1$  (eq. 2.3). Il est bien connu [2; 54] que les équations tronquées (2.4 - 2.5) admettent des solutions exactes statistiquement stationnaires, appelées équilibres absolus, avec un champ de vitesse qui est gaussien (voir eq (3.20) - (3.21)) pour tout  $t$  et  $\mathbf{k}$  tel que  $\sup_{\alpha} |k_{\alpha}| \leq k_{\max}$ .

Afin de calculer un temps de corrélation nous allons évaluer (voir les relations (4.6) et (4.11) dans le cas de l'équation de Burgers 1D) :

$$\ddot{\Delta}_{il}(0) = -\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} \left[ \sigma_{jk} \sigma_{mn} + 2 \sigma_{jm} \sigma_{kn} \right]. \quad (4.19)$$

Il est facile de remarquer à partir de l'équation (2.4) que  $\epsilon$  vaut dans ce cas :

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{i}{2} \mathcal{P}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p} - \mathbf{q}). \quad (4.20)$$

Avant de démarrer le calcul définissons  $\sigma$  à partir de la relation (3.24), en posant  $\beta = 1/C$  :

$$\langle \hat{u}_{\alpha}(\mathbf{k}, t) \hat{u}_{\beta}(-\mathbf{k}, t) \rangle = C P_{\alpha\beta}(\mathbf{k}), \quad (4.21)$$

pour  $\mathbf{k}$  tel que  $\sup_{\alpha} |k_{\alpha}| \leq k_{\max}$ , et  $\sigma$  est donc donné par

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = C P_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}). \quad (4.22)$$

On peut relier  $C$  à  $E_{\text{th}}$ , en appelant les relations (2.3) et (4.21) :

$$E_{\text{th}} = \sum_{\sup_{\alpha} |k_{\alpha}| \leq k_{\max}} E(k, t) = \sum_{\sup_{\alpha} |k_{\alpha}| \leq k_{\max}} \frac{1}{2} \langle \hat{u}_{\alpha}(\mathbf{k}, t) \hat{u}_{\alpha}(-\mathbf{k}, t) \rangle = \frac{C}{2} \sum_{\sup_{\alpha} |k_{\alpha}| \leq k_{\max}} P_{\alpha\alpha}(\mathbf{k}),$$

et en notant que  $P_{\alpha\alpha} = 2$ , on obtient :

$$E_{\text{th}} = C(2k_{\text{max}})^3 . \quad (4.23)$$

D'abord, remarquons que le premier terme de (4.19) est nul, comme dans le cas Burgers (et pour la même raison : dans les deltas de  $\sigma$  et  $\epsilon$ ,  $k$  doit être nul lors des contractions d'indice). Il nous reste donc à évaluer le second terme de (4.19),  $\ddot{\Delta}_{\alpha\delta}(0) = -2\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\delta\mu\nu} \sigma_{\beta\mu} \sigma_{\gamma\nu}$ , et en insérant (4.20) et (4.22), on trouve :

$$\sum_{\mathbf{p}_1 \mathbf{q}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{q}_2} \frac{C^2}{2} \mathcal{P}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \mathcal{P}_{\delta\mu\nu}(\mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2) P_{\beta\mu}(\mathbf{p}_1) \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) P_{\gamma\nu}(\mathbf{q}_1) \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) ,$$

qui peut se réécrire en effectuant les sommes sur les nombres d'onde :

$$\ddot{\Delta}_{\alpha\delta}(0) = \sum_{\mathbf{q}} \frac{C^2}{2} \mathcal{P}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}_1) \mathcal{P}_{\delta\mu\nu}(\mathbf{k}_2) P_{\beta\mu}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}) P_{\gamma\nu}(\mathbf{q}) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) .$$

Pour des raisons de symétries, on calculera plutôt la somme suivante, obtenue par changement de variable (on translate  $\mathbf{q}$  de  $\mathbf{k}/2$ ) :

$$\ddot{\Delta}_{\alpha\delta}(0) = \sum_{\mathbf{q}} \frac{C^2}{2} \mathcal{P}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}_1) \mathcal{P}_{\delta\mu\nu}(-\mathbf{k}_1) P_{\beta\mu}(\mathbf{k}_1/2 - \mathbf{q}) P_{\gamma\nu}(\mathbf{k}_1/2 + \mathbf{q}) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) . \quad (4.24)$$

Cette expression est évaluée par Mathematica. On note  $\mathbf{k}_1 = (k_1, 0, 0)$  et  $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$ , et :

$$-C P_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \sum_{\mathbf{q}} \frac{2 C k_1^2 (q_y^2 + q_z^2) (k_1^2 + 4 (3 q_x^2 + q_y^2 + q_z^2))}{k_1^4 + 8 k_1^2 (-q_x^2 + q_y^2 + q_z^2) + 16 (q_x^2 + q_y^2 + q_z^2)^2} .$$

Ainsi, on écrit la dérivée seconde en temps de la matrice de corrélation en fonction de la matrice de corrélation :

$$\ddot{\Delta}_{\alpha\beta}(0) = -\Delta_{\alpha\beta}(0) \sum_{\mathbf{q}} \frac{2 C k_1^2 (q_y^2 + q_z^2) (k_1^2 + 4 (3 q_x^2 + q_y^2 + q_z^2))}{k_1^4 + 8 k_1^2 (-q_x^2 + q_y^2 + q_z^2) + 16 (q_x^2 + q_y^2 + q_z^2)^2}$$

On estime cette somme pour  $k_{\text{max}}$  grand, en la réduisant à une intégrale sur  $(q_x, q_y, q_z) = (x k_{\text{max}}, y k_{\text{max}}, z k_{\text{max}})$ , et en prenant le terme d'ordre 2 en  $\epsilon = k_1/k_{\text{max}}$  dans la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ . On trouve :

$$-C k_{\text{max}}^3 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} dx dy dz \frac{(y^2 + z^2) (12 x^2 + 4 y^2 + 4 z^2)}{8 (x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

c'est à dire d'après l'équation (4.23)

$$-E_{\text{th}} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} dx dy dz \frac{(y^2 + z^2) (12 x^2 + 4 y^2 + 4 z^2)}{64 (x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

On peut ainsi calculer le temps d'auto-corrélation (voir 4.4 et 4.17), et la constante que nous cherchons dans :

$$\tau_{\mathbf{C}}(k) = C_{\text{Euler}} / (k \sqrt{E_{\text{th}}}) \quad (4.25)$$

s'écrit

$$C_{\text{Euler}} = 1/\sqrt{I} \text{ avec } I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} dx dy dz \frac{(y^2 + z^2) (12 x^2 + 4 y^2 + 4 z^2)}{64 (x^2 + y^2 + z^2)^2} . \quad (4.26)$$

La valeur numérique de cette intégrale est donnée par Mathematica :  $I = 0.486422$ , et ainsi

$$C_{\text{Euler}} = 1/\sqrt{I} = 1.43382 . \quad (4.27)$$

### 4.2.2 Mesure du temps de décorrélation

Notre but est de déterminer un temps caractéristique de la décorrélation des modes du champ de vitesse. Le calcul analytique (4.25) donne une estimation que nous allons essayer de vérifier numériquement. À cet effet, on calcule numériquement les fonctions de corrélation pour tous les modes, et on observe leur moyenne sur des coquilles sphériques de largeur  $\Delta k = 1$ , comme pour le spectre d'énergie (éq. 2.3). Notons qu'à trois dimensions, cette moyenne peut engendrer des biais d'observation pour les plus petits nombre d'onde.

D'autre part, on peut ajouter au résultat (4.25) un terme correctif à l'ordre supérieur en  $k/k_{\max}$  : il s'agit du même type facteur que dans le cas Burgers ( $\lambda = 1/2$ ), et on écrit le temps caractéristique des fonctions de corrélation aux temps courts

$$\tau_{\mathbf{C}}^*(k) \sim \frac{1.43382}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{E_{\text{th}} (1 - \lambda k/k_{\max})}}. \quad (4.28)$$

Cette correction s'avère nécessaire lorsque l'on veut observer la superposition des fonctions de corrélation pour différents nombres d'onde du fait que les résolutions atteintes dans cette étude sont faibles, et par conséquent la correction en  $k/k_{\max}$  se fait rapidement sentir. Ceci nous permettra de mettre en évidence visuellement que les fonctions de corrélation dans Euler 3D ont un comportement aux temps longs qui diffère du comportement aux temps courts. Le temps corrigé  $\tau_{\mathbf{C}}^*(k)$  ne sera donc utilisé qu'à cette intention.

L'estimation que nous chercherons à valider par nos simulations restera  $\tau_{\mathbf{C}}(k)$  (éq. 4.25) dans la limite  $k \ll k_{\max}$ , où elle coïncide avec  $\tau_{\mathbf{C}}^*(k)$ . Nous procéderons donc en deux temps : vérifier l'accord aux temps courts (deux méthodes d'ajustement seront envisagées). Puis on procédera à l'estimation empirique d'une loi valable aux temps longs : nous présenterons donc une troisième méthode d'ajustement quantifiant les temps caractéristiques de la décorrélation des modes.

### Concordance du calcul et des simulations

Les fonctions de corrélation dans Euler 3D sont calculées au vol par le code périodique général. On peut espérer superposer directement les fonctions de corrélations obtenues pour chaque nombre d'onde en adimensionnant le temps de chacune des fonctions de corrélations par le temps  $\tau_{\mathbf{C}}^*$  (éq. 4.28). La figure 4.5 présente différentes fonctions de corrélations au temps adimensionné par le temps  $\tau_{\mathbf{C}}^*(k)$ , et la parabole d'équation  $1 - t^2/2$ .

Nous avons vérifié que le nombre de réalisations était suffisant pour déterminer correctement les fonctions de corrélations en effectuant des simulations avec un nombre croissant de réalisations pour une résolution fixée ( $48^3$ ). La figure 4.5 montre que les fonctions de corrélations ainsi obtenues se superposent de façon tout à fait satisfaisante jusqu'à décorrélation.

Nous avons observé (données non présentées) que la superposition au delà de  $k = 9$  est quasi parfaite jusqu'à ce que la fonction de corrélation atteigne 0. Cependant, on remarque que les fonctions de corrélations des modes les plus petits s'éloignent significativement du comportement parabolique. En passant en échelle logarithmique (partie droite de la figure 4.5), le comportement des plus petits modes se révèlent quasi exponentiel en temps. Les plus grands modes présentent également un écart à la parabole, mais celui-ci ne semble pas exponentiel et ressemble à ce qui a pu être observé dans le cas Burgers.

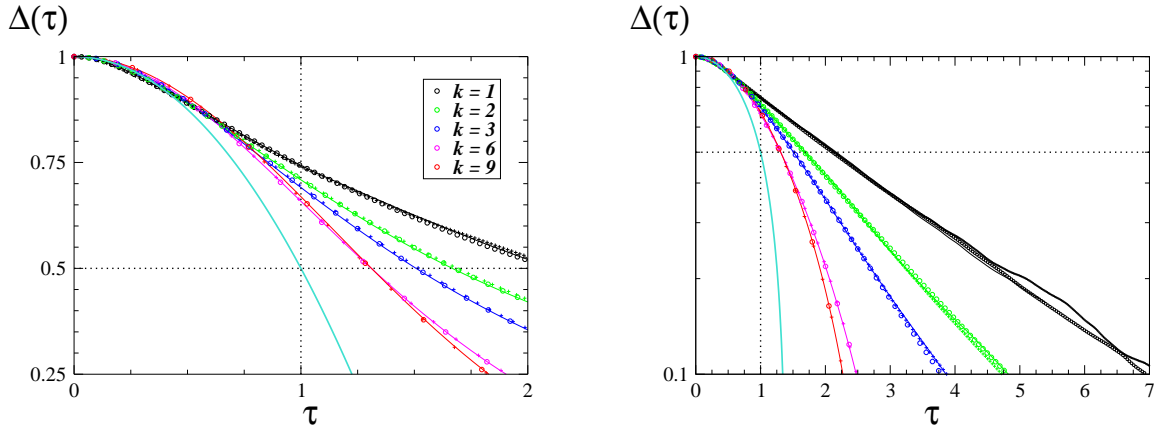


FIGURE 4.5 – Décroissances parabolique et exponentielle des fonctions de corrélation en fonction du temps adimensionné  $\tau = t/\tau_C^*$ . **Gauche** : les échelles sont linéaires. **Droite** : échelle linéaire en abscisse et logarithmique en ordonnée. Résolution  $48^3$ . Modes  $k = 1, 2, 3, 6, 9$  (couleurs indiquées sur la figure pour des cercles). En trait plein (turquoise) : la parabole  $1 - t^2/2$ . On présente différents nombres  $r$  de réalisations :  $r = 192$  (croix +);  $r = 500$  (traits pleins);  $r = 2000$  (cercles o).

Nous allons nous intéresser plus spécifiquement au comportement au voisinage de l'origine, en mesurant une échelle de temps caractéristique que l'on notera  $\tau_\Delta$ . À l'image du calcul analytique, nous déterminons ici le temps caractéristique associé au comportement parabolique à l'origine en mesurant directement la dérivée seconde des fonctions de corrélation au voisinage de l'origine. À cet effet, on effectue un ajustement par un polynôme de degré 2 des fonctions de corrélations jusqu'à atteindre une valeur arbitraire de  $\Delta_0$  pour la fonction de corrélation, puis on dérive deux fois le polynôme obtenu pour mesurer le temps de corrélation. La valeur  $\Delta_0$  est fixée de manière à éviter la pollution de la mesure par la queue exponentielle. On fixe  $\Delta_0 = 0.95$ .

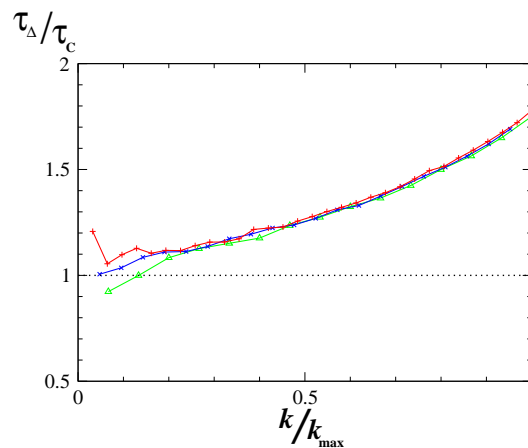


FIGURE 4.6 – Temps de corrélation  $\tau_\Delta$  mesuré au voisinage de l'origine ( $\Delta_0 = 0.95$ ) rapporté à la valeur théorique  $\tau_C$  (éq. 4.25) en fonction de  $k/k_{\max}$ . En vert ( $\Delta$ ) :  $48^3$ ; en bleu ( $x$ ) :  $64^3$ ; en rouge (+) :  $96^3$ .

Le rapport  $\tau_\Delta/\tau_C$  tend vers 1 lorsque  $k/k_{\max} \rightarrow 0$ , quelque soit la résolution considérée. Cependant, pour les plus petites valeurs de  $k/k_{\max}$ , les mesures semblent de moindre qualité, ce dont

on peut chercher l'origine dans l'existence de queues exponentielles des fonctions de corrélation. D'autre part, ces queues exponentielles suggèrent que le temps caractéristique calculé et mesuré n'est pas entièrement représentatif de la décorrélation des petits modes.

Afin de quantifier ces différences de comportement aux temps courts et aux temps longs, nous proposons une estimation grossière du temps de décorrélation inspirée de la mesure du temps à mi-hauteur dans le cas de l'équation de Burgers. Pour une hauteur fixée  $H$  de l'intervalle  $[0, 1]$ , on peut mesurer le temps  $\tau_H$  auquel la fonction de corrélation atteint  $H$  :  $\Delta(k, \tau_H) = H$ . Cette mesure est effectuée pour tous les modes et pour différentes valeurs de  $H$ . On compare le résultat obtenu au calcul analytique (équ. 4.25). Les résultats pour la résolution  $48^3$  sont fournis sur la partie gauche de la figure 4.7.

Il est clair que pour un mode donné, le temps mesuré doit augmenter quand  $H$  diminue. Comme point de comparaison, on calcule la dépendance du temps mesuré à  $H$  dans le cas d'une fonction de corrélation parfaitement parabolique :  $\tau \sim 1/\sqrt{2-2H}$ . Aussi semble-t-il judicieux d'ajuster les différentes mesures par ce facteur pour pouvoir les comparer : on présente ces mesures ajustées sur la partie droite de la figure 4.7. Cela revient simplement à observer le rapport  $\Theta$  du temps  $\tau_H$  pour lequel une fonction de corrélation  $\Delta(k, t)$  atteint la hauteur  $H$  et le temps pour lequel une parabole d'équation  $y = 1 - t^2/2\tau_C^2(k)$  atteint la même hauteur :  $\Theta = \tau_H/(\tau_C(k) \sqrt{2-2H})$ .

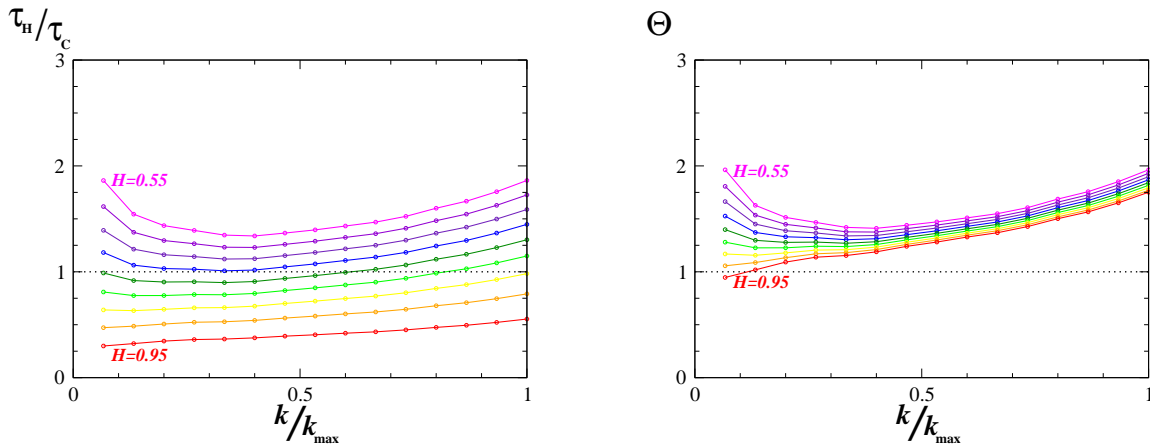


FIGURE 4.7 — **Gauche** : rapport du temps de corrélation  $\tau_H$  mesuré au voisinage de l'origine (de paramètre  $H$ ) à la valeur théorique  $\tau_C$  (équ. 4.25). **Droite** : même rapport ajusté de  $\sqrt{2-2H}$ , pour obtenir  $\Theta$ .  $H$  diminue de 0.95 (en rouge) à 0.55 (en violet). Résolution  $48^3$ .

Deux observations générales sont d'abord à signaler :

- d'abord, les résultats sont dans l'intervalle  $[1, 2]$  : pour un mode fixé, plus  $H$  diminue, plus on s'écarte du rapport 1 espéré pour  $\Theta$ . Mais si  $H$  est suffisamment proche de 1, les plus petits modes semblent bien tendre vers le rapport 1 espéré. Cela se comprend bien car l'approximation parabolique n'est valable que lorsque  $H \rightarrow 1$ .
- puis, pour une hauteur  $H$  fixée, l'écart au rapport 1 espéré semble croître lentement quand  $k$  augmente. Nous avons observé le même genre de dérive dans la première mesure effectuée.



Cette mesure grossière est tout à fait cohérente avec la mesure précédente de  $\tau_\Delta$ , ce qui signifie que tant que l'on reste au voisinage de l'origine, la parabole est bien représentative de la décorrélation. Cependant on notera une différence essentielle à petit  $k$  : pour  $H$  fixée, on observe un intervalle de décroissance du rapport considéré. Dans cet intervalle, la fonction de corrélation s'éloigne très significativement de son ajustement parabolique, et d'autant plus que le mode est petit. C'est précisément cet effet que nous voulions mettre en évidence : il traduit l'effet du comportement exponentiel des queues des fonctions de corrélations à petit  $k$ . Nous allons essayer d'en mesurer l'importance.

La décroissance du rapport  $\Theta = \tau_H / (\tau_C(k) \sqrt{2 - 2H})$  est représentée en échelles logarithmiques sur la figure 4.8, pour 3 valeurs de  $H$ . On remarque que la pente de la zone décroissance s'accroît quand  $H$  diminue, et que la décroissance semble quasi linéaire ce qui suggère un comportement en puissance de  $k$ . À titre comparatif, on représente une pente en  $k^{-0.3}$  sur le même graphique : on en déduit qu'à petit  $k$  le temps à "mi-hauteur" s'écarte significativement des valeurs calculées avec une pente proche de  $k^{-1.3}$  différente du  $k^{-1}$  résultant du calcul analytique.

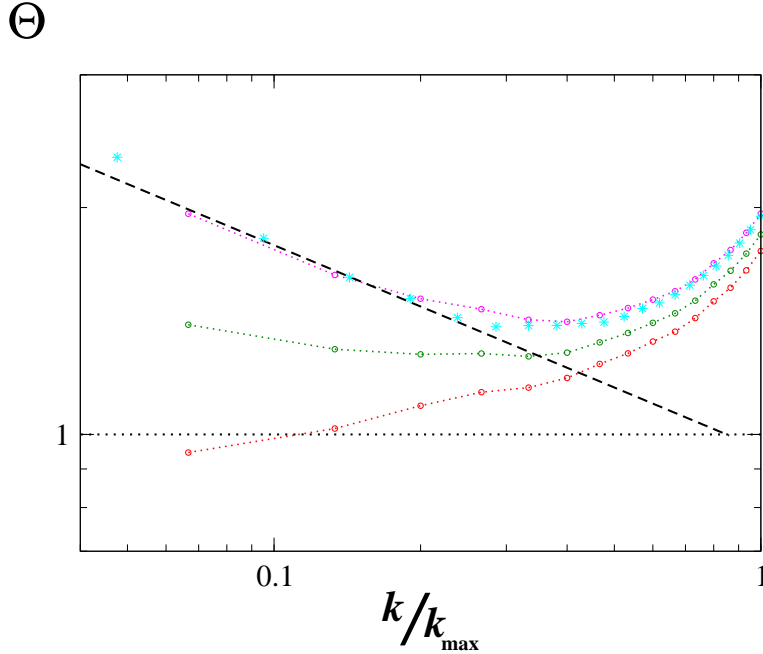


FIGURE 4.8 —  $\Theta$  en fonction du nombre d'onde  $k$ . Résolution  $48^3$  (o), de bas en haut :  $H = 0.95$  (rouge),  $0.75$  (vert),  $0.55$  (violet). À titre indicatif, résolution  $64^3$  (\*) :  $H = 0.6$ . Pente indicative en loi de puissance (droite hachurée noire) et valeur espérée (1, pointillés noirs).

Ceci permet de conclure à l'existence de deux échelles caractéristiques des fonctions de corrélations : un temps  $\tau_p$  caractérisant la fonction de corrélation aux temps courts, et un temps  $\tau_e$  caractérisant un comportement exponentiel aux temps longs. Les ajustements présentés jusqu'ici nous ont permis de vérifier que le calcul analytique caractérisait le comportement des fonctions de corrélations aux temps courts, c'est à dire que  $\tau_p(k) \sim \tau_C(k)$ .

Cependant, les simulations numériques permettent de montrer que c'est l'échelle  $\tau_e \gg \tau_p$  qui

contrôle la décorrélation pour les modes petits devant le nombre d'onde de coupure.  $\tau_e$  semble décroître plus vite que  $k^{-1}$ , ce que nous nous proposons de déterminer plus précisément dans le paragraphe suivant.

### Determination d'une loi empirique du temps de décorrélation

On voudrait mesurer un temps associé aux queues exponentielles des fonctions de corrélation : on pourrait faire un ajustement dans un intervalle donné  $[\Delta_1; \Delta_2]$  des valeurs des fonctions de corrélation en choisissant cet intervalle de façon à s'éloigner du comportement parabolique au voisinage de l'origine. Le problème de cette méthode est qu'on ne peut pas exhiber un tel intervalle pour tous les modes en même temps. Il paraît donc indispensable de choisir un ajustement qui mesure à la fois  $\tau_e$  et  $\tau_p$ .

On cherche donc une forme fonctionnelle qui permet de quantifier simultanément les deux temps caractéristiques introduits, c'est-à-dire parabolique aux temps courts et exponentielle aux temps longs. Ce comportement est voisin de celui d'un cosinus hyperbolique. Mais un cosinus hyperbolique ne sera caractérisé que par un seul temps. Afin d'en mesurer deux, nous devons introduire une deuxième fonction de projection : si le cosinus hyperbolique permet de décrire la décroissance exponentielle et donne un comportement parabolique en développant à l'ordre 2 au voisinage de 0, on peut chercher une fonction qui corrigera le comportement parabolique aux temps courts et sera négligeable aux temps longs. L'idée est alors de considérer le logarithme de la fonction de corrélation : au voisinage de 0, la fonction  $\tanh^2$  permettra d'apporter une correction parabolique aux temps courts, en tendant vers une constante aux temps longs.

La forme d'ajustement proposé est alors :

$$-\text{Log}(\Delta(k, t)) = B \text{Log}(\cosh(at)) + D \tanh^2(at) . \quad (4.29)$$

Cette forme d'ajustement respecte la parité de la fonction de corrélation. Un développement limité à l'ordre 2 des deux membres de l'équation (4.29) donne :

$$\frac{t^2}{2\tau_p^2} = B a^2 \frac{t^2}{2} + 2D a^2 \frac{t^2}{2} ,$$

ce qui permet de quantifier le temps "parabolique" :

$$\tau_p = \frac{1}{\sqrt{(B + 2D) a^2}} \quad (4.30)$$

D'autre part, en dérivant par rapport au temps l'équation (4.29), on obtient :

$$\begin{aligned} -\frac{d\text{Log}(\Delta)}{dt} &= a B \tanh(at) + 2a D \cosh^{-2}(at) \tanh(at) \\ &\sim a B \text{ aux temps longs} \end{aligned}$$

ce qui permet de quantifier le temps caractéristique de décroissance exponentielle comme :

$$\tau_e = \frac{1}{a B} \quad (4.31)$$

Un tel ajustement comporte 3 paramètres, ce qui est supérieur au nombre nécessaire pour ajuster nos deux temps caractéristiques. Pour extraire les valeurs des paramètres, on minimise l'erreur donnée par :

$$\chi^2 = \sum_{0 \leq t \leq t_{max}} \left[ -\text{Log}(\Delta(k, t)) - B \text{Log}(\cosh(at)) - D \tanh^2(at) \right]^2$$

Le temps  $t_{max}$  reste à fixer. Or, en pratique, le nombre de réalisations restant assez faible, certaines fonctions de corrélations obtenues numériquement deviennent parfois légèrement négatives. Le temps  $t_{max}$  est donc arbitrairement fixé de façon à n'ajuster les fonctions de corrélations que dans l'intervalle  $[0.1; 1]$ . On minimise l'erreur en résolvant les équations  $\partial\chi^2/\partial a = 0$ ,  $\partial\chi^2/\partial B = 0$  et  $\partial\chi^2/\partial D = 0$ . On notera que la minimisation par rapport au paramètre  $a$  n'est pas une équation linéaire, contrairement aux deux autres. En pratique, on détermine  $B$  et  $D$  pour une valeur de  $a$  fixée, et on prend l'erreur comme une fonction de  $a$  que l'on minimise à son tour.

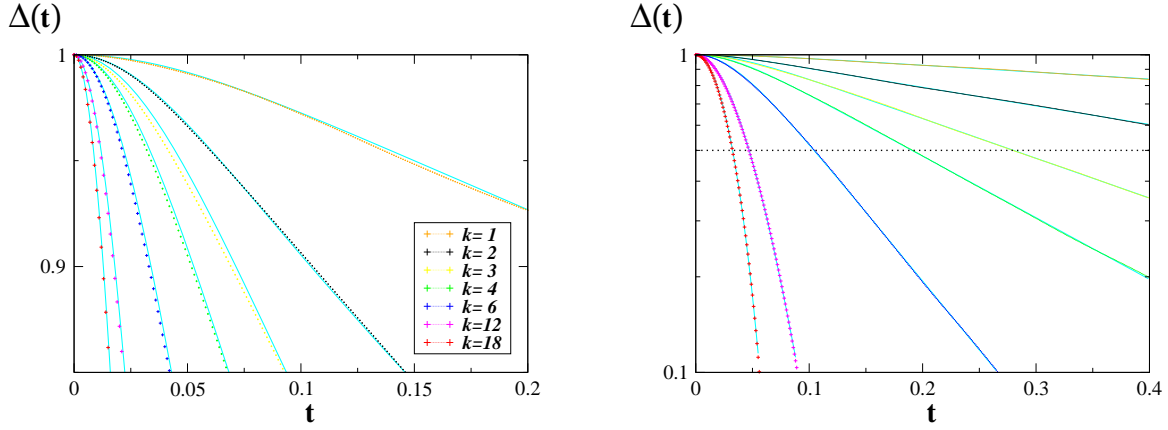


FIGURE 4.9 – Ajustement (trait plein, bleu) des fonctions de corrélation (+) pour différents nombres d'onde  $k$ , en résolution  $96^3$ . **Gauche** : en échelles linéaires. **Droite** : ordonnées en échelle logarithmique.

On présente dans la figure 4.9 un ajustement typique obtenu par cette méthode. On remarque que l'ajustement de la fonction de corrélation est de très bonne qualité pour la queue exponentielle (partie droite de la figure), mais de qualité légèrement moindre au voisinage de l'origine pour les plus petits nombres d'onde (partie gauche de la figure).

On peut alors à nouveau comparer le temps  $\tau_p$  mesuré à la valeur  $\tau_C$  calculée analytiquement (éq. 4.25). On présente dans la figure 4.10 les résultats obtenus pour différentes résolutions : l'accord est très satisfaisant quand  $k/k_{max} \rightarrow 0$  (10 % d'erreur relative). On observe toujours une lente dérive des mesures quand  $k$  augmente. Et on remarquera que les mesures semblent moins régulières pour les plus petites valeurs de  $k$  devant  $k_{max}$  : la zone parabolique est en effet de taille de plus en plus petite quand  $k$  diminue, ce qui explique que la précision diminue. Par contre, la zone exponentielle est de taille plus grande quand  $k$  diminue, et les mesures du temps  $\tau_e$  ne présenteront pas ce défaut.

Concernant le temps  $\tau_e$ , nous nous attendons à observer une dépendance en  $k$  plus importante que pour  $\tau_p$ . En écrivant les dimensions des paramètres du problème :  $[E_{th}] = L^2 T^{-2}$ ,  $[k] = [k_{max}] = L^{-1}$ , l'analyse dimensionnelle nous permet d'écrire que

$$\tau_e(k) = \frac{1}{k \sqrt{E_{th}}} f\left(\frac{k}{k_{max}}\right) \quad (4.32)$$

où  $f$  est une fonction à déterminer.

La partie droite de la figure 4.10 présente le produit  $\Pi_e = \tau_e k \sqrt{E_{th}}$  en fonction de  $k/k_{max}$  en échelles linéaires (en échelles logarithmiques sur la figure 4.11). On observe une décroissance de type loi de puissance pour toutes les résolutions pour les modes suffisamment petits devant  $k_{max}$ . On propose donc d'établir une loi empirique pour la fonction  $f$  de type :

$$f(u) = K u^{-p} . \quad (4.33)$$

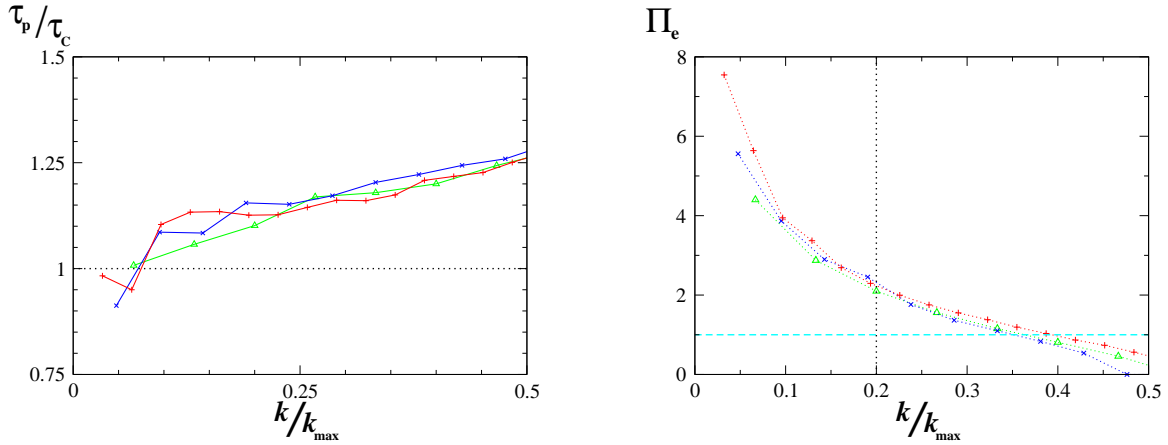


FIGURE 4.10 – **Gauche** : rapport  $\tau_p/\tau_c$  en fonction de  $k/k_{max}$ . **Droite** : produit  $\Pi_e = \tau_e k \sqrt{E_{th}}$  en fonction de  $k/k_{max}$ . En vert ( $\Delta$ ) :  $48^3$ ; en bleu ( $\times$ ) :  $64^3$ ; en rouge ( $+$ ) :  $96^3$ .

Nous devons donc estimer deux paramètres : la constante  $K$  et l'exposant  $p$ . On pourrait mesurer ces paramètres pour chaque résolution et mesurer l'influence du nombre de réalisations. Mais il faudrait tout d'abord définir l'intervalle d'ajustement en remarquant que nous ne nous intéressons qu'aux faibles valeurs de  $k$  devant  $k_{max}$  (puisque on veut  $\tau_e \gg \tau_p$ ) : une limite du type  $k/k_{max} < 0.2$  conduirait à effectuer des ajustements sur 3 points en résolution  $48^3$ . Compte tenu des faibles résolutions auxquelles nous avons accès, cette approche serait trop sophistiquée. D'autre part, on perdrait de vue la force du raisonnement dimensionnel adopté : les courbes présentées dans la partie droite de la figure 4.10 se superposent, et on peut directement ajuster l'ensemble des courbes.

L'intervalle d'ajustement est fixé de façon à ce que  $k/k_{max} < 0.2$ , c'est-à-dire que  $\Pi_e > 2$  et  $\tau_e > \tau_p$  (voir partie droite de la figure 4.10). Nous choisissons de garder données des simulations qui ont le plus de réalisations, à résolution fixée. Et nous ne garderons que des résolutions supérieures à  $48^3$  puisque celles-ci ne comportent déjà que trois points dans l'intervalle d'ajustement. Le nombre de point total compris dans l'intervalle d'ajustement est 12, et ils sont

ajustés par une droite en échelle logarithmique. On trouve  $K = 0.82$  et  $p = 0.65$ . Le résultat de cet ajustement est présenté dans la figure 4.11.

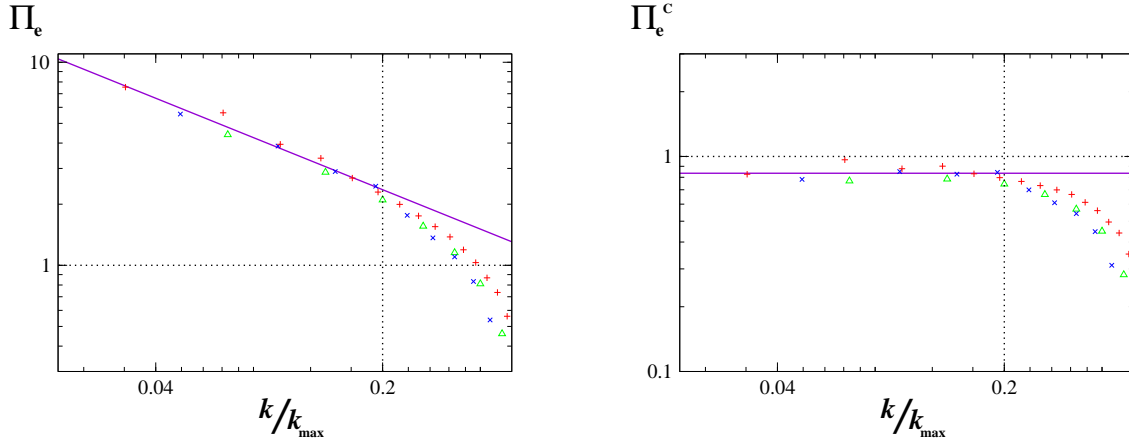


FIGURE 4.11 – **Gauche** :  $\Pi_e(k) = \tau_e k \sqrt{E_{th}}$  en fonction de  $k/k_{max}$ , et son ajustement (équ. 4.33) avec  $K = 0.82$  et  $p = 0.65$  (trait plein). **Droite** :  $\Pi_e^C(k) = \Pi_e(k) \cdot (k/k_{max})^{0.65}$  en fonction de  $k/k_{max}$  et la droite de constante  $K = 0.82$  (trait plein). En vert ( $\Delta$ ) :  $48^3$  ; en bleu (x) :  $64^3$  ; en rouge (+) :  $96^3$ .

On notera que la somme des carrés des erreurs résultant de cet ajustement varie très régulièrement autour du minimum local obtenu (pour  $p = 0.65$ ), et qu'elle serait augmentée de 50% pour des valeurs de l'exposant  $p = 0.5$  et  $p = 0.8$ . D'autre part, accroître le nombre de points ajustés augmente l'exposant trouvé de façon assez régulière, et à titre indicatif, en effectuant l'ajustement sur 20 points (au lieu de 12) on mesurerait un exposant de 0.75. Ceci suggère que ce résultat présente une faible incertitude. Cependant, des simulations à plus grande résolution permettrait d'en accroître la précision.

### 4.2.3 Discussion

Il semble ainsi que le comportement des fonctions de corrélation dans Euler 3D soit plus complexe que dans le cas de Burgers 1D : les fonctions de corrélations sont contrôlées par un comportement parabolique au voisinage de l'origine et par une décroissance exponentielle aux temps longs. Cette première étude des fonctions de corrélation met en évidence que pour les plus petits modes ce sont les queues exponentielles qui déterminent le temps caractéristique de décroissance, alors que le temps caractéristique est contrôlé par le comportement parabolique au voisinage de l'origine pour les modes plus élevés. Ce résultat semble admissible du fait que le temps des queues exponentielles décroît plus rapidement avec  $k$  (en  $k^{-p}$  où  $p$  est estimé à 1.65) que le temps caractéristique dû à l'allure parabolique au voisinage de l'origine (en  $k^{-1}$ ). Tout se passe comme si deux phénomènes étaient en compétition et que celui dont le temps caractéristique est le plus long l'emportait (voir figure 4.12).

En conclusion de ce chapitre, nous avons mesuré les temps caractéristiques des fonctions de corrélation, ce qui n'a jamais été étudié auparavant, à notre connaissance, et nous avons pu mettre en évidence l'existence de deux effets compétitifs sur la décroissance des fonctions de

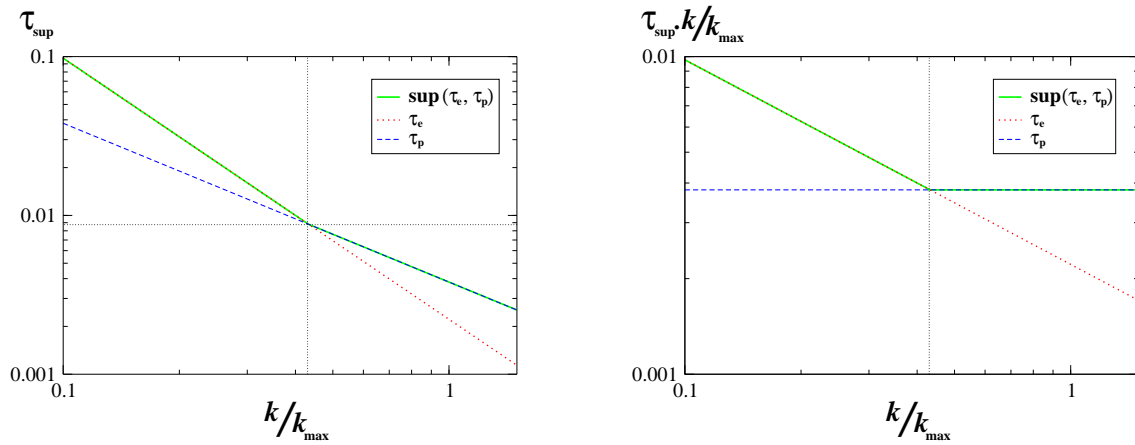


FIGURE 4.12 – **Gauche** : loi empirique  $\tau_{sup}$  du temps de décorrélation en fonction de  $k/k_{max}$ . **Droite** : on multiplie  $\tau_{sup}$  par  $k/k_{max}$ . En bleu : loi  $\tau_p \sim \tau_C$  obtenue par le calcul analytique. En rouge : loi  $\tau_e$  évaluée à partir des queues exponentielles des fonctions de corrélations (éq. 4.32). En trait plein : le maximum  $\tau_{sup}$  des deux courbes.

corrélation dans Euler 3D. D'autre part, cette étude a été motivée par la recherche de temps caractéristiques d'évolution des fonctions de réponse afin de proposer un mécanisme de dissipation spontanée dans les simulations spectralement tronquées des équations d'Euler présentées dans le chapitre 2. Deux cas-limites se présentent ainsi pour la suite de notre étude : un temps de "décorrélation" en  $k^{-1}$  ou en  $k^{-1.65}$ . Nous avons vu en effet que ces deux temps caractéristiques peuvent respectivement contrôler les fonctions de corrélation selon l'échelle considérée. Il nous appartiendra donc dans la suite d'envisager lequel de ces deux cas est le plus adapté à la description de l'amortissement d'un écoulement à grande échelle par thermalisation avec les petites échelles.



## Chapitre 5

# Échelle dissipative turbulente

Nous avons observé au chapitre 2 qu'apparaît spontanément une séparation d'échelles dans des écoulements régis par les équations d'Euler tronquées spectralement : le spectre d'énergie présente alors une zone décroissante et une zone croissante qui permettent de définir un minimum du spectre d'énergie d'abscisse  $k_{th}$ . Cette séparation d'échelle correspond à la relaxation de l'écoulement tronqué vers son équilibre thermodynamique. L'objectif de ce chapitre est de donner une estimation de la séparation d'échelle  $k_{th}$  observée à partir des temps de relaxation évalués dans le chapitre précédent.

Nous avons vu à la fin du chapitre 2 qu'il était possible de donner une estimation grossière de  $k_{th}$  en assimilant les deux zones du spectre d'énergie à des lois de puissance ( $k^2$  pour la zone croissante et  $k^{-5/3}$  pour la zone décroissante), c'est-à-dire en ne tenant compte d'aucun effet dissipatif. Cependant, nous avons mis en évidence le rôle dissipatif des petites échelles thermalisées vis-à-vis des grandes échelles.

Afin de prendre en compte les effets dissipatifs, nous avons étudié dans le chapitre 4 les fonctions de corrélations des modes du champs de vitesse dans le cas d'un système à l'équilibre thermodynamique. Nous avons mis en évidence des temps caractéristiques de décorrélation qui obéissent à certaines lois d'échelle. Les résultats du chapitre 3 vont nous permettre de relier ces temps caractéristiques aux temps de relaxation des fonctions de réponse. Ceci nous permettra de proposer de nouvelles estimations de  $k_{th}$ .

### 5.1 Estimation de l'échelle dissipative

Le spectre d'énergie présenté sur la figure 5.1 décroît en  $k^{-5/3}$  à petit  $k$  et croît en  $k^2$  à grand  $k$ . Aux nombres d'onde intermédiaires, le spectre d'énergie décroît plus vite que  $k^{-5/3}$ , suggérant qu'un effet de type dissipatif soit présent. On envisage dans cette partie d'estimer cet effet dissipatif pour déterminer une loi d'échelle pour le nombre d'onde  $k_{th}$  en fonction de la coupure spectrale  $k_{max}$  des simulations, ainsi que des paramètres de Kolmogorov (dépendant du temps)  $\varepsilon$  et  $E_{th}$ .

L'estimation grossière  $k_m$  du nombre d'onde  $k_{th}$  obtenue dans le chapitre 1 en négligeant l'absorption intermédiaire propose un comportement  $k_m \sim \left(\frac{\varepsilon}{E_{th}^{3/2}}\right)^{2/11} k_{max}^{9/11}$ . Si l'on veut prendre en



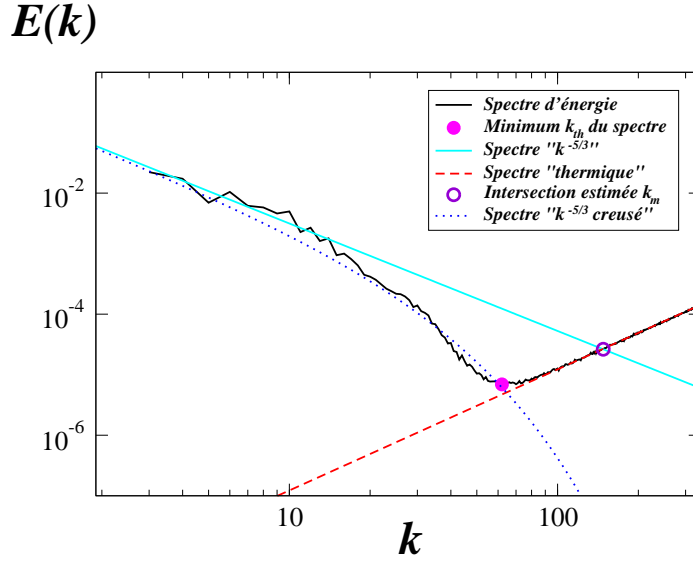


FIGURE 5.1 – Loi de Kolmogorov et thermalisation partielle du spectre d'énergie. Mise en évidence d'un effet dissipatif creusant le spectre.

compte l'effet dissipatif qui creuse le spectre d'énergie aux valeurs intermédiaires (figure 5.1), il faut relier l'échelle  $k_{th}$  aux temps de relaxation  $\tau_R$  définis comme les échelles de temps caractéristiques de décroissance des fonctions de réponse (3.22) au voisinage de l'équilibre absolu à grand  $k$ . Le théorème fluctuation dissipation établi dans le chapitre 3 établit que  $\tau_R = \tau_C$ , où  $\tau_C$  est le temps de corrélation à l'équilibre.

Dans le chapitre précédent, nous avons estimé  $\tau_C$  analytiquement et en effectuant des simulations Monte-Carlo (périodique général) pour obtenir les fonctions de corrélations (moyennées sur des coquilles) des équilibres absolus. Nous avons trouvé deux temps caractéristiques : un temps  $\tau_p$  caractéristique de la corrélation aux temps courts, et un temps  $\tau_e$  caractéristique de la décorrélation exponentielle (pour les modes petits devant la coupure spectrale). Ces temps caractéristiques associés au nombre d'onde  $k$  obéissent à des lois d'échelle simples que nous avons discutées :

$$\tau_p = \frac{C}{k\sqrt{E_{th}}} \quad \text{et} \quad \tau_e = \frac{C^*}{k\sqrt{E_{th}}} \left( \frac{k_{max}}{k} \right)^{0.65}$$

que l'on peut réécrire de façon générale comme :

$$\tau_C(\rho) = \frac{C_\rho}{k_{max}\sqrt{E_{th}}} \left( \frac{k_{max}}{k} \right)^\rho \quad (5.1)$$

où  $\rho$  vaut 1 et 1.65, et  $C_\rho$  vaut respectivement  $C$  et  $C^*$ . Les constantes  $C$  et  $C^*$  ont été évaluées à partir des simulations Monte-Carlo présentées dans le chapitre précédent. Tant que la séparation d'échelle  $k \ll k_{max}$  est valable, les constantes  $C$  peuvent être estimées à  $C \sim 1.43$ , et  $C^* \sim 0.82$ .

Il est important de remarquer que ces lois d'échelle ont été établies dans le cas de systèmes à l'équilibre thermodynamique, c'est-à-dire dans des situations très différentes des régimes de relaxation que nous étudions ici. Cependant, la séparation d'échelle observée dans les régimes

de relaxation a permis de mettre en évidence une thermalisation partielle du système : l'énergie de la zone thermalisée du système (les petites échelles) varie lentement et de façon suffisamment régulière pour qu'on puisse essayer de lui adapter les lois établies dans le cas de l'équilibre. En effet, il est facile de vérifier que le temps caractéristique d'évolution des modes thermalisés ( $k \geq k_{\text{th}}, \tau_C(k) \leq \tau_C(k_{\text{th}}) \sim \frac{1}{10}$ ) reste petit comparé au temps caractéristique d'évolution du bain thermique (donné par  $E_{\text{th}}/\varepsilon \sim 1$ ). Ces lois (5.1) n'étant valables que pour des modes thermalisés, on ne pourra rendre compte des effets dissipatifs qu'au voisinage de  $k_{\text{th}}$ . Pour estimer les effets dissipatifs sur les plus petits modes du système (i.e. les modes en  $k^{-5/3}$ ), de nouveaux travaux seraient à envisager.

Pour des modes voisins du bain thermique, les lois décrites par l'équation (5.1) permettent de remplacer la relation standard de Navier-Stokes  $\varepsilon(k, t) = \nu k^2 E(k, t)$  par :

$$\varepsilon(k, t) = \bar{\nu} |k|^\rho E(k, t) \quad (5.2)$$

où  $\bar{\nu} = k_{\text{max}}^{1-\rho} \sqrt{E_{\text{th}}}/C_\rho$  et  $\varepsilon(k, t) = -\partial E(k, t)/\partial t$  est la densité spectrale de dissipation.

En supposant que la dissipation n'a lieu que dans une bande de largeur  $\alpha k_d$  autour de  $k_d$ , on peut estimer la dissipation totale  $\varepsilon \sim \bar{\nu} k_d^\rho E(k_d) \alpha k_d$ . Avec  $E(k_d) \sim k_d^2 E_{\text{th}}/k_{\text{max}}^3$ , cela mène à l'estimation "dissipative" de  $k_{\text{th}}$

$$k_d \sim \left( \frac{\varepsilon}{E_{\text{th}}^{3/2}} \right)^{\frac{1}{3+\rho}} k_{\text{max}}^{\frac{2+\rho}{3+\rho}}. \quad (5.3)$$

Les échelles obtenues pour les deux valeurs de  $\rho$  sont  $k_d$  et  $k_d^*$  (pour  $\rho = 1$  et  $\rho = 1.65$  respectivement). Nous pouvons donc comparer ces deux estimations à  $k_{\text{th}}$ . Les rapports  $k_{\text{th}}/k_d$  et  $k_{\text{th}}/k_d^*$  sont présentés sur la figure 5.2. On constate que ces deux rapports sont raisonnablement constants. Cependant, le rapport  $k_{\text{th}}/k_d$  semble dériver lentement avec le temps, ce qui n'est pas le cas du rapport  $k_{\text{th}}/k_d^*$ . L'estimation obtenue avec  $\rho = 1.65$  semble donc légèrement meilleure.

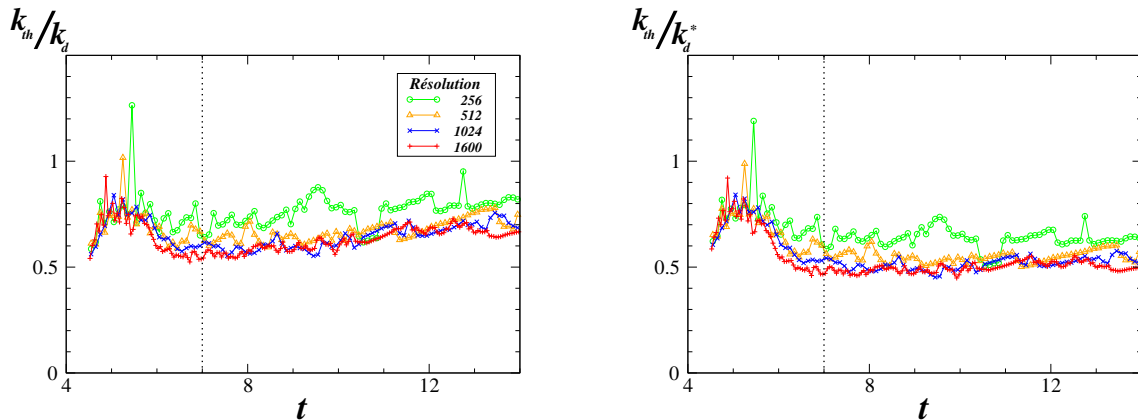


FIGURE 5.2 – Évolution temporelle du rapport de  $k_{\text{th}}$  à l'échelle de dissipation estimée : pour  $\rho = 1$ ,  $k_d$  (à gauche) ; et pour  $\rho = 1.65$ ,  $k_d^*$  (à droite). En vert (o) :  $256^3$  ; en jaune ( $\Delta$ ) :  $512^3$  ; en bleu (x) :  $1024^3$  ; en rouge (+) :  $1600^3$ .

Toutefois, il faut relativiser ces résultats. On peut mettre en doute les différentes quantités mesurées sur les simulations : la mesure de  $k_{th}$  est relativement rudimentaire, mais influe peu sur les autres quantités mesurées  $E_{th}$  et  $\varepsilon$  (qui sont des grandeurs spatialement intégrées). Les estimations  $k_d$  et  $k_d^*$  sont donc obtenues avec une meilleure précision que la quantité estimée  $k_{th}$ .

On présente l'évolution temporelle du rapport des deux estimations  $k_d^*/k_d$  dans la figure 5.3 : on remarque en effet que ce rapport semble beaucoup moins affecté par les différentes imprécisions de mesure que les quantités présentées dans la figure 5.2. On note également que la différence de comportement est significative. On peut donc raisonnablement penser que  $k_d^*$  est une meilleure estimation de  $k_{th}$ .

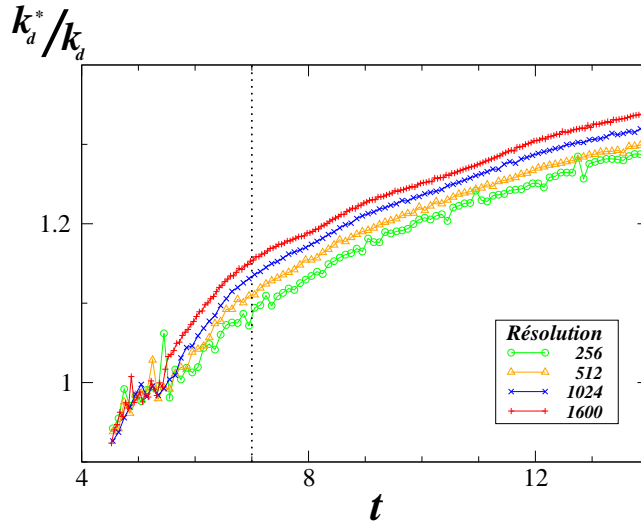


FIGURE 5.3 – Évolution temporelle du rapport des deux échelles estimées :  $k_d^*/k_d$ .

Rappelons enfin que l'exposant  $\rho = 1.65$  a été obtenu empiriquement et que sa mesure reste imprécise (voir section 4.2.2).

Pour conclure ce paragraphe, soulignons le résultat essentiel obtenu ici : on a pu estimer la dynamique de relaxation du système en associant une échelle de dissipation au "bain thermique". Le modèle de dissipation choisi est celui d'une interaction locale du bain thermique sur les modes voisins. Ce modèle est tout à fait compatible avec l'observation d'un spectre décroissant plus vite que  $k^{-5/3}$  au voisinage du bain thermique. Ce modèle restreint cependant l'interaction du bain thermique avec le reste de l'écoulement à son voisinage immédiat : or cette interaction est portée par la non-linéarité dans les équations d'Euler, et s'étend donc sur l'ensemble de l'écoulement. Notons qu'un modèle d'interaction globale du bain thermique sur le reste de l'écoulement pourrait être envisagé, mais les calculs développés ici sur la base des résultats produits dans le chapitre 4 sortiraient largement de leur cadre de validité. En effet, pour espérer étendre ces raisonnements, il nous faudrait mesurer (par simulation Monte Carlo) les temps de corrélations de modes hors équilibre dans un système à l'équilibre thermodynamique. Toutefois, on notera que le bon accord de l'estimation  $k_d^*$  à  $k_{th}$  suggère que les effets du bain thermique sur des modes éloignés sont faibles.

## 5.2 Discussion et validité des lois d'échelle

Nous avons estimé la séparation d'échelle  $k_{th}$  de deux façons : une estimation grossière ( $k_m$ ) dans le chapitre 1 par extrapolation du comportement en  $k^{-5/3}$  du spectre, et une estimation plus élaborée ( $k_d^*$ ) tenant compte des effets dissipatifs du bain thermique.

La comparaison des figures 2.8 et 5.2 montre que dans la bande du spectre exploré, il est très difficile de discriminer entre les deux estimations  $k_m$  et  $k_d^*$ . En effet, le rapport des estimations  $k_m$  et  $k_d^*$  donne :

$$k_m/k_d^* \sim \left( \frac{\varepsilon}{E_{th}^{3/2}} \right)^{-5/154} k_{max}^{5/154}. \quad (5.4)$$

et en remarquant la petitesse de l'exposant 5/154, on comprend que le rapport  $k_m/k_d^*$  est peu sensible aux variations limitées des paramètres que nous pouvons actuellement mettre en oeuvre. On représente le rapport  $k_d^*/k_m$  sur la figure 5.4. Comme dans le paragraphe précédent, la différence de comportement de ces estimateurs est significative. Il est toutefois plus difficile d'en observer l'effet dans leur confrontation à  $k_{th}$ .

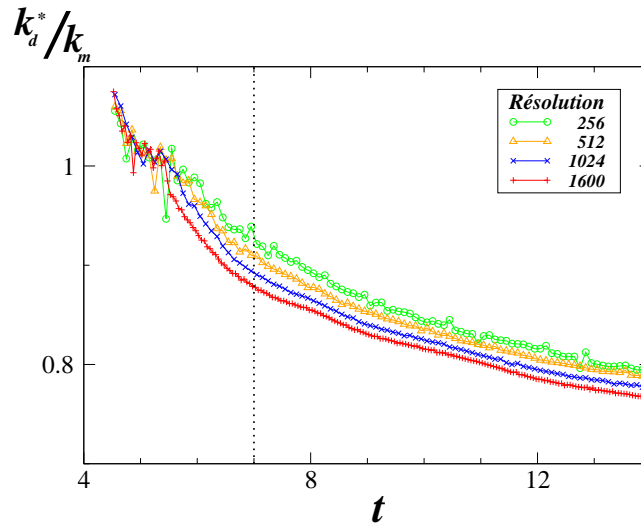


FIGURE 5.4 – Évolution temporelle du rapport des deux échelles estimées :  $k_d^*/k_m$ .

On remarquera que  $k_d^*$  est *a priori* une meilleure estimation de  $k_{th}$  que  $k_m$  parce qu'il prend en compte les effets dissipatifs. Cependant,  $k_m$  est *de facto* plus robuste que  $k_d^*$ , justement parce qu'il ne dépend pas du modèle de dissipation choisi.

L'obtention d'une échelle dissipative permet par ailleurs d'envisager d'autres aspects propres à la turbulence. À l'image de ce qu'il est courant de représenter pour des spectres turbulents, on peut essayer de superposer les spectres en les adimensionnant en abscisses par l'échelle de dissipation  $k_d^*$  et en ordonnées par  $\varepsilon^{2/3} k_d^{*-5/3}$ . Le résultat est présenté dans la figure 5.5.

Sur la partie gauche de la figure 5.5 sont représentés les spectres à différents instants pour la même résolution (1600<sup>3</sup>). La partie de droite de la figure 5.5 présente les mêmes spectres après adimensionnement : la superposition obtenue est assez convaincante. Cela suggère de superposer

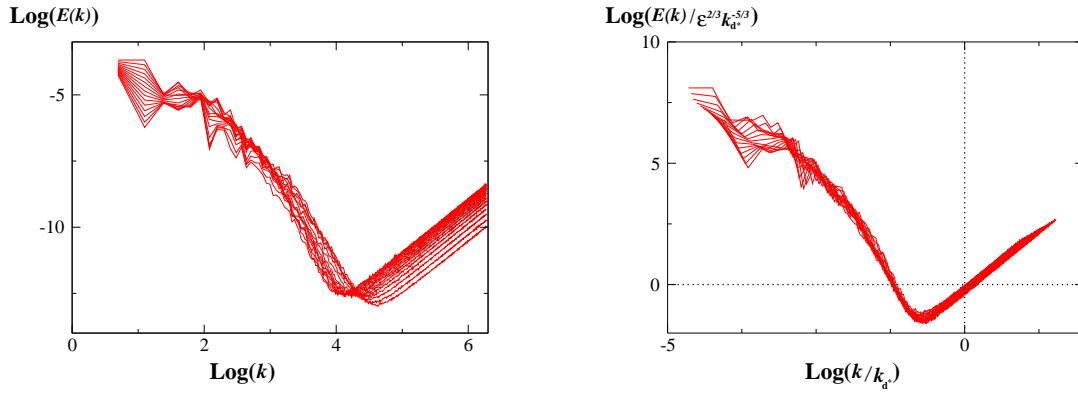


FIGURE 5.5 – **Gauche** : superposition du logarithme des spectres d'énergie (en fonction de  $\log(k)$ ) entre  $t = 7.3$  et  $t = 11.5$  (tous les 0.3) en résolution  $1600^3$ . **Droite** : adimensionnement des mêmes spectres d'énergie (en abscisse par  $k_d^*$ , et en ordonnée par  $\varepsilon^{2/3} k_d^{*-5/3}$ ).

les spectres pour différentes résolutions. La figure 5.6 en présente le résultat à l'instant du maximum de dissipation respectif de chaque résolution. La superposition semble tout à fait correcte. On se propose donc d'effectuer un ajustement global sur tous les spectres en même temps : on reproduit donc l'ajustement du chapitre 2 (équ. 2.10), et les points ajustés sont les mêmes que ceux de la figure 2.7. On obtient  $n = 1.78$ .

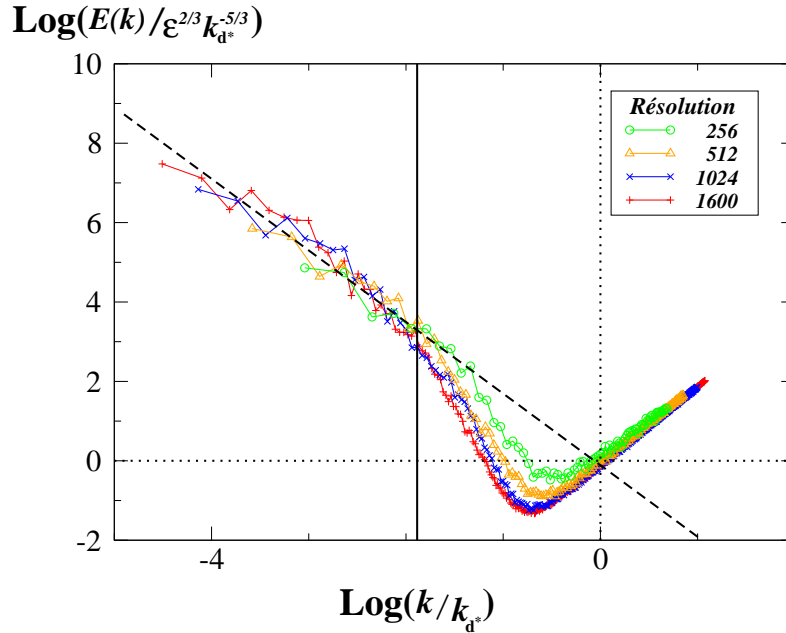


FIGURE 5.6 – Loi de Kolmogorov sur les spectres d'énergie : superposition du logarithme des spectres adimensionnés à l'instant du maximum de dissipation pour les différentes résolutions étudiées. La droite noire hachurée a une pente en  $k^{-1.78}$ , exposant résultant d'un ajustement global (les points ajustés sont à gauche du trait plein noir vertical).

Enfin, on peut aussi considérer le flux d'énergie à travers les modes rapporté à la puissance dissipée  $\varepsilon$  : sur la partie gauche figure 5.7 on représente différents spectres au voisinage du maximum de la dissipation. On constate que ce spectre est quasi constant de valeur 1 au delà de  $k = 20$  et jusqu'à la coupure thermique. La nullité aux bords ( $k = 2$  et  $k = k_{\max}$ ) est la conséquence de la conservation de l'énergie dans les simulations. L'allure du spectre moyen (figure 5.7 à droite) obtenu à partir des spectres entre  $t = 6.7$  et  $t = 11.5$  (où  $n$  est compatible avec  $k^{-5/3}$ ) est similaire.

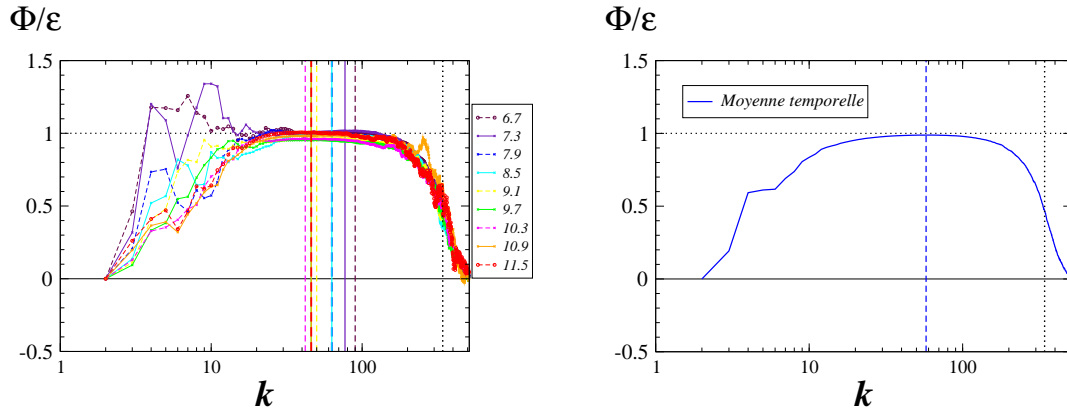


FIGURE 5.7 – Spectre du flux d'énergie  $\Phi$  rapporté à la puissance dissipée  $\varepsilon$  en  $1024^3$ . **Gauche** : pour différents instants au voisinage du maximum de dissipation (les droites verticales représentent la coupure thermique  $k_{\text{th}}$ , et la droite noire verticale en pointillés représente la coupure spectrale  $k_{\max}$  du au desaliasing). **Droite** : moyenne des spectres entre  $t = 6.7$  et  $t = 11.5$ .

On observe bien un flux depuis les grandes échelles vers les plus petites : l'énergie cascade vers les grands modes. Ce qui est particulièrement intéressant est que ce flux soit quasi uniforme et de l'ordre de l'unité dans les différentes échelles : on observe cette propriété pour le flux moyen d'écoulements turbulents.

Cependant en effectuant une moyenne des spectres (entre  $t = 6.7$  et  $t = 11.5$ ), on constate que dans l'intervalle "turbulent" (les plus petits modes) le flux normalisé est assez inférieur à 1 : cela peut s'expliquer par le fait qu'il n'existe pas d'échelle d'injection de l'énergie, et on observe en effet que le flux normalisé passe de valeurs proches de 1 à des valeurs assez inférieures dans l'intervalle de temps considéré. Nous étudions en effet un régime transitoire de relaxation pour une dissipation quasi-stationnaire (voisinage du maximum de dissipation) et non pas un système entretenu autour d'un équilibre stationnaire. On observe également ce type de comportement dans les simulations de turbulence (Navier-Stokes) en déclin.

### 5.3 Perspectives

En résumé, on a observé une turbulence de type Kolmogorov dans une dynamique "d'Euler tronqué". Les lois d'échelle ont été obtenues par des effets dissipatifs qui apparaissent spontanément dans ce système réversible. Dans ce contexte, les équations d'Euler spectralement tronquées apparaissent comme un modèle minimal de turbulence.

Remarquons que la mise à l'équilibre spontanée des petites échelles apparaissant dans des systèmes isolés, tels qu'étudiés ici, ne doit pas être confondu avec la mise à l'équilibre résultant du contact avec un thermostat extérieur. En effet, la dynamique réversible des systèmes isolés génère spontanément une température dépendant du temps et des conditions initiales. Bien qu'ayant défini une température à chaque instant, nous n'avons jamais essayé d'étudier la température locale de nos systèmes : le carré des transformées de Fourier temporelles des modes du champ de vitesse, suivi de l'application d'un filtre passe-bas (éliminant les basses fréquences) pourrait en effet nous permettre de visualiser la température locale à chaque instant, et ce travail reste à faire.

Les spectres du flux d'énergie (figure 5.7) montrent qu'en plus de son (pseudo) effet dissipatif, la troncature spectrale agit principalement comme une barrière qui bloque le flux d'énergie vers les petites échelles. Ainsi, il serait probablement possible de fabriquer un tel blocage expérimentalement [55], en utilisant des matériaux visco-élastiques comme les micelles géantes [56]. Le problème de savoir si ces expériences confirmeront ces lois reste ouvert.

Pour terminer, l'observation de la superposition de spectres d'énergie adimensionnés et des spectres de flux d'énergie suggèrent d'observer un tel système dans des conditions de stationnarité. Nous pourrions essayer de forcer le système à maintenir son échelle de dissipation fixe : ce qui est absorbé par le bain thermique (et qui devrait augmenter la température) serait prélevé et re-injecté dans le plus petit mode. On pourrait espérer voir ainsi un regime turbulent entretenu, avec une échelle dissipative fixée. Cependant, nous n'avons pas encore trouvé comment effectuer une telle manipulation sur le code.

# Conclusion générale

Les résultats obtenus dans le chapitre 1 sur les écoulements de TG et de KP ne nous ont pas permis de conclure sur l'existence d'une singularité réelle à un temps fini  $t^*$ . Mais en considérant les équations tronquées comme un système dynamique même quand leur solution n'approxime plus les solutions des équations d'Euler originales, nous avons observé l'émergence d'une turbulence à la Kolmogorov pendant un régime intermédiaire de relaxation vers les équilibres absolus. Des lois d'échelle ont été obtenues pour les effets dissipatifs qui apparaissent dans ce système réversible en temps.

On notera que ces effets dissipatifs régularisent certaines quantités d'intérêt dans l'étude des singularités. Une quantité couramment observée est l'enstrophie  $\Omega(t) = \int_0^\infty k^2 E(k, t) dk$ , qui est calculée directement (c'est-à-dire sans moyenne sur les coquilles) par :

$$\Omega(t) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}'} |\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}', t)|^2 \mathbf{k}'^2. \quad (5.5)$$

La figure 5.8 montre l'évolution temporelle de l'enstrophie  $\Omega(t)$  et de sa dérivée temporelle normalisée :

$$S(t) = \left(\frac{135}{98}\right)^{1/2} \Omega^{-3/2} \frac{d\Omega}{dt} \quad (5.6)$$

(qui s'identifie à la "skewness" quand l'écoulement est istrope [5]). Remarquons que (5.6) implique que :  $\Omega(t)^{-1/2} = \Omega(0)^{-1/2} - (392/135)^{1/2} \int_0^t ds S(s)$ .

Ainsi  $S(t)$  devrait tendre vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini, de façon à éviter une explosion à temps fini de l'enstrophie. Une telle décroissance n'est pas visible sur la figure 5.8. Le temps d'intégration est en fait trop court pour révéler le comportement asymptotique de  $S$  et de  $\Omega$ . Nous avons vu dans le chapitre 1 qu'une résolution plus grande était nécessaire pour accroître le temps d'intégration. Cependant, on peut observer que la relaxation régularise le comportement de  $\Omega(t)$  et de  $S(t)$  (dans l'intervalle de temps [4; 6]) sur la figure 5.9.

Remarquons enfin que le système dynamique atteint toujours un équilibre absolu. Deux cas de figure peuvent alors se présenter : si le temps  $t^*$  est infini, l'intégration temporelle des équations discrètes peut approximer les solutions continues jusqu'à n'importe quel instant  $t_N$  à condition d'augmenter suffisamment la résolution  $N$ . Au delà du temps  $t_N$ , les équations tronquées tendent vers un équilibre absolu. Si  $t^*$  est infini, alors  $t_N$  n'est pas borné. Mais si  $t^*$  est fini, il borne  $t_N$  : l'apparition d'une singularité ne permet plus d'approximer des solutions régulières, et le système relaxe ensuite vers un équilibre absolu.



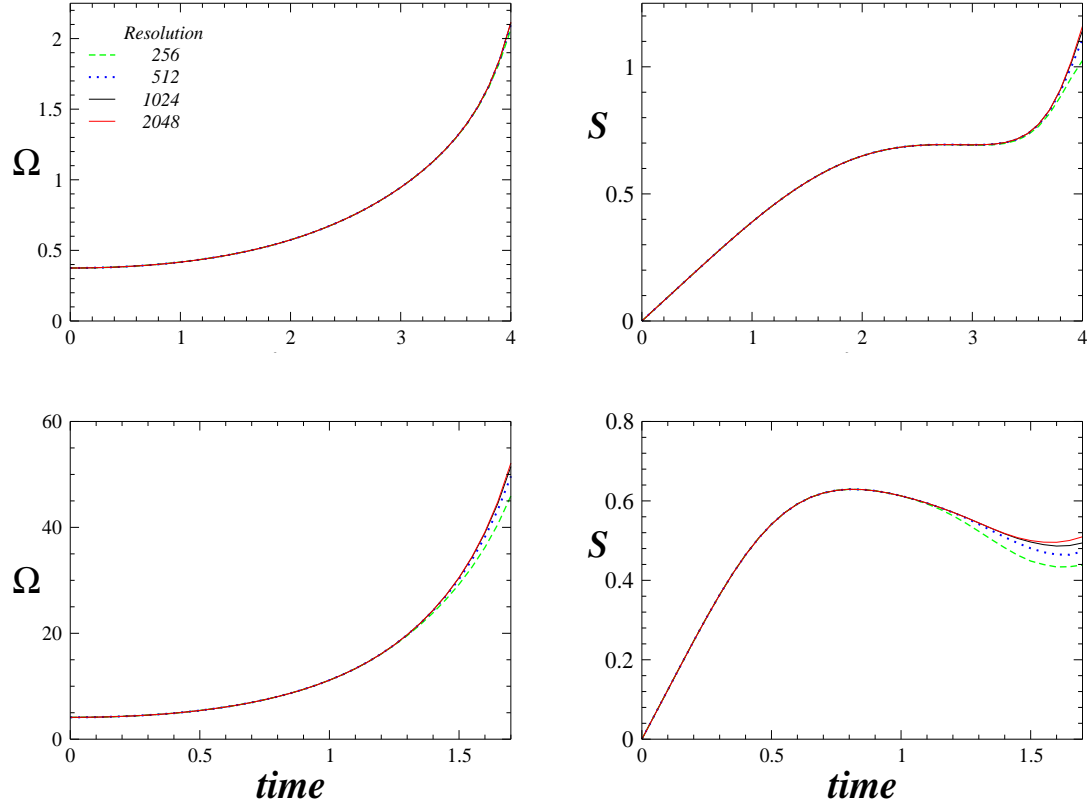


FIGURE 5.8 – Enstrophie  $\Omega(t)$  et sa dérivée temporelle normalisée  $S(t)$  (voir éq.(5.6)) pour les écoulements de TG (en haut) et de KP (en bas) pour différentes résolutions.

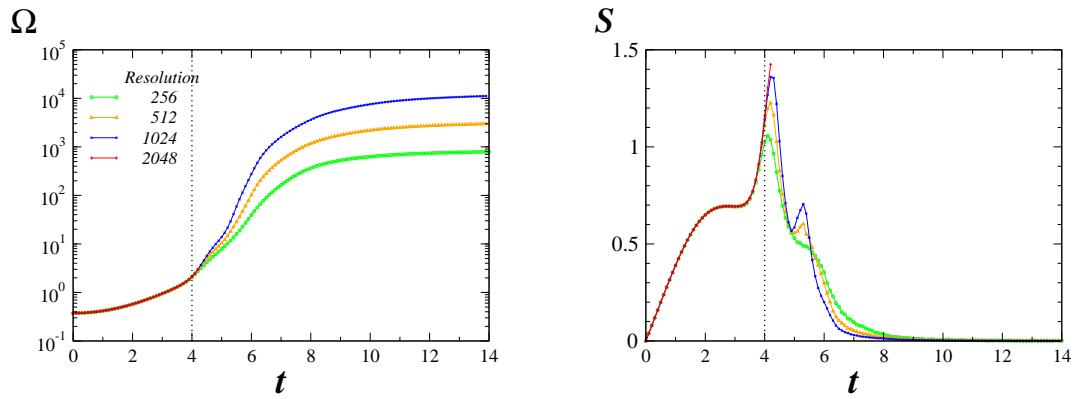


FIGURE 5.9 – Régularisation des comportements de l'enstrophie  $\Omega(t)$  (à gauche) et de sa dérivée temporelle normalisée  $S(t)$  (à droite) pour l'écoulement de TG à différentes résolutions.

# **Annexes**



## Chapitre 6

# Méthodes numériques

Les équations simulées par notre code sont les équations de Navier-Stokes incompressible, par méthode pseudo-spectrale. Il est important de noter que l'on peut décrire les solutions continues (DNS) de ces équations mais aussi sortir de ce cadre. Ce que le code décrit alors sont des systèmes dynamiques discrets gouvernés par ces équations. Nous détaillerons dans le chapitre suivant les méthodes et le formalisme adapté à la description de tels systèmes.

### 6.1 Généralités sur les méthodes spectrales

Pour leur facilité de mise en œuvre et leur convergence, nous avons choisi d'utiliser les méthodes spectrales pour la résolution directe des équations de Navier-Stokes. Nous considérons dans cette thèse des écoulements solutions des équations de Navier-Stokes, Euler ou Burgers. Les écoulements considérés sont périodiques et nous travaillons dans une boîte (1D ou 3D) périodique. Dans la suite, nous supposons que notre problème est unidimensionnel pour illustrer les principes généraux, et nous généraliserons à 3 dimensions le formalisme introduit.

#### 6.1.1 Représentation d'une fonction

Les champs  $f$  considérés vérifient :  $f(x + L) = f(x)$  où  $L$  est la longueur de périodicité de la boîte. Pour simplifier, nous choisissons  $L = 2\pi$ . Une fonction continue par morceaux peut être représentée par sa série de Fourier infinie :

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx}. \quad (6.1)$$

On définit le produit scalaire par :

$$\langle g, h \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{g}(x) h(x) dx, \quad (6.2)$$

les coefficients de Fourier s'écrivent :

$$\hat{f}_k = \langle e^{ikx}, f(x) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx f(x) e^{-ikx}. \quad (6.3)$$

Généralement,  $f$  n'est connue que par ses valeurs en un nombre de points finis de  $L$  :

$$f_j = f(x_j) \text{ avec } x_j = j\Delta x \text{ et } j = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (6.4)$$

de telle façon que l'intervalle d'échantillonnage soit égal à  $\Delta x = 2\pi/N$ . Les points d'échantillonnage sont supposés être capables de représenter la forme de  $f(x)$ . Ils constituent ce qu'on appelle "l'espace physique". Nous verrons plus loin que les points  $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$  sont aussi appelés points de "collocation". Les coefficients de Fourier sont alors approchés par :

$$\hat{f}_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n) e^{-ikx_n}, \quad (6.5)$$

avec  $x_n = 2\pi n/N$   $n = 0, \dots, N-1$ . C'est ce qu'on appelle la transformée de Fourier discrète (TFD). On a projeté  $f$  sur une base de  $N$  fonctions (les fonctions trigonométriques). On peut alors trouver une approximation  $f_N$  de  $f$  en inversant la TFD de la façon suivante :

$$f_N(x_n) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \hat{f}_N(k) e^{ikx_n}. \quad (6.6)$$

Les points  $k = -N/2, \dots, N/2-1$  constituent "l'espace spectral" discret. Ils caractérisent les fonctions de notre base de projection. On peut remarquer que les formules (6.5,6.6) s'écrivent de façon plus symétrique que (6.1,6.3). A priori, effectuer les sommes (6.5,6.6) requiert un nombre d'opérations de l'ordre de  $\mathcal{O}(N^2)$ . Ceci a constitué un handicap quant à l'utilisation de cette méthode jusqu'à ce que Cooley et Tukey, en 1965, inventent l'algorithme des transformées de Fourier rapides (ou "Fast Fourier Transform" ou FFT). Cet algorithme des FFT permet de réduire le nombre d'opérations à  $\mathcal{O}(N \log_2 N)$ . Un autre avantage des FFT et de l'utilisation des transformées de Fourier en général réside dans la factorisation des convolutions en 2 et 3 dimensions ; nous y reviendrons dans la suite.

Retenons que nous écrivons un champ de vitesse comme suit :

$$\begin{cases} u_j = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} e^{2i\pi jk/N} \hat{u}_k \\ \hat{u}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2i\pi jk/N} u_j \end{cases}$$

### 6.1.2 Convergence des méthodes spectrales

La convergence des méthodes spectrales est bien meilleure que celle des méthodes de différences finies. Cela tient au fait qu'une méthode de calcul par différences finies d'ordre  $p$  calcule les coefficients de son approximation d'un champ  $f$  dans le développement de Taylor avec  $p+1$  points (erreur en  $\mathcal{O}[\Delta x^p]$ ) alors que les méthodes pseudo-spectrales calculent les coefficients  $\hat{f}_N(k)$  de son approximation de  $f$  avec les  $N$  points de la résolution choisie. Autrement dit, l'ordre des méthodes pseudo-spectrales n'est pas fixé à l'avance, mais augmente avec la résolution : pour un intervalle d'échantillonnage  $\Delta x = \mathcal{O}[1/N]$ , l'erreur "pseudo-spectrale" est d'ordre  $\mathcal{O}[(1/N)^N]$ .

Les erreurs décroissent plus vite que toute puissance finie de  $N$ , ce qu'on appelle une convergence exponentielle.

De ce point de vue les méthodes spectrales permettent un gain considérable de stockage mémoire pour atteindre une précision fixée.

### 6.1.3 Approximation d'une EDP par méthode pseudo-spectrale

Nous devons résoudre une équation aux dérivées partielles 1D de la forme :

$$\begin{aligned} D(u) &= 0 \text{ dans } [0, 2\pi] \times ]0, T] \\ u(x, 0) &= u^0(x) \end{aligned} \quad (6.7)$$

où  $D$  est un opérateur différentiel et  $T$  est un nombre positif.

L'approximation de la solution  $u$  du problème consiste à chercher  $u_N$ , dans une base de fonctions régulières, solution du problème approché. Il s'agit donc de trouver une fonction  $u_N(x, t)$  dans  $[0, 2\pi] \times ]0, T]$  telle que [1]

$$\begin{aligned} D(u_N) &= 0 \text{ dans } [0, 2\pi] \times ]0, T] \\ u_N(x, 0) &= u_N^0(x) \end{aligned} \quad (6.8)$$

La résolution numérique des équations de Navier-Stokes que nous avons étudiée utilise des conditions aux limites périodiques. Elle se fait alors par la recherche des coefficients de Fourier de  $u_N$  qui rendent ceux de  $D(u_N)$  tous nuls. Il existe deux méthodes spectrales importantes que nous allons illustrer sur une équation plus simple que Navier Stokes.

#### Méthode de Galerkin

La méthode Galerkin repose sur la projection de la fonction que l'on veut estimer sur une base de fonctions bien choisie (fonctions trigonométriques ou polynômes de Chebyshev). Cette base est finie et tout calcul de produit implique de projeter le produit sur cette base en éliminant les termes qui n'y sont pas représentables. On utilise ici des développements en série de Fourier.

Pour illustrer le principe de cette méthode, considérons l'équation aux dérivées partielles de Burgers qui s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6.9)$$

avec les conditions aux limites périodiques  $u(x + 2\pi) = u(x)$ . En utilisant la représentation en TFD, cette équation s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \hat{u}_N(n) e^{inx} \right) &= - \left( \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} \hat{u}_N(j) e^{ijx} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \hat{u}_N(k) e^{ikx} \right) \\ &+ \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \hat{u}_N(n) e^{inx} \right). \end{aligned}$$

La contribution du terme non linéaire en  $e^{inx}$  est obtenue en projetant sur la base des exponentielles complexes. Or, si les termes linéaires en  $u$  ne contiennent que des nombres d'onde

$|k| \leq N/2$ , le terme non-linéaire d'ordre 2 contient des nombres d'onde tels que  $|k| \leq N$ . La méthode de Galerkin consiste à garder seulement les termes dont le nombre d'onde est inférieur à  $N/2$  en valeur absolue. Il vient alors :

$$\frac{\partial \hat{u}_N(n)}{\partial t} = \sum_{j+k=n} \hat{u}_N(j) ik \hat{u}_N(k) - \nu n^2 \hat{u}_N(n) \quad (6.10)$$

Le nombre d'opérations nécessaires pour évaluer la convolution est  $\mathcal{O}(N^2)$ , ce qui est assez coûteux. D'où l'idée de faire le calcul du terme non-linéaire dans l'espace physique, où l'on effectue un simple produit ( $N$  opérations) en utilisant des FFT ( $\mathcal{O}(N \log_2 N)$  opérations).

### Méthode pseudo-spectrale

Les méthodes pseudo-spectrales consistent à calculer l'approximation d'une fonction par une base de fonction déterminée en interpolant sur un ensemble de points de grille (dits de collocation) : cela signifie que l'équation différentielle à satisfaire sera exactement résolue sur les points de collocation.

C'est cette méthode que nous avons choisi d'utiliser pour calculer les convolutions dans l'espace physique : on utilise comme base les TFD des fonctions trigonométriques (des fonctions  $\delta$  de Dirac) qui correspondent précisément à nos points de collocation. Pour le terme non-linéaire de (6.9), on utilise donc deux FFT inverses ( $\mathcal{O}(N \log N)$  opérations) pour avoir  $u$  et  $\frac{\partial u}{\partial x}$  dans l'espace physique. Puis, on calcule le produit ( $N$  opérations) et on utilise une FFT ( $\mathcal{O}(N \log N)$  opérations) pour ramener le produit dans l'espace spectral. Concrètement, on calcule  $TFD(u \frac{\partial u}{\partial x})$ . On a :

$$\begin{aligned} TFD\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right) &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} u(l) \frac{\partial u}{\partial x}(l) e^{-i2\pi \frac{ln}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} e^{-i2\pi \frac{ln}{N}} \sum_{p=0}^{N-1} e^{i2\pi \frac{lp}{N}} \hat{u}(p) \sum_{q=0}^{N-1} e^{i2\pi \frac{lq}{N}} \widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}(q) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} e^{-i2\pi \frac{l}{N}(p+q-n)} \hat{u}(p) \widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}(q) \end{aligned}$$

La somme sur  $l$  comporte tous les termes tels que :  $p + q - n \equiv 0[N]$ . Finalement, on trouve :

$$\frac{\partial \hat{u}_N(n)}{\partial t} = \sum_{j+k=n [N]} \hat{u}_N(j) ik \hat{u}_N(k) - \nu n^2 \hat{u}_N(n). \quad (6.11)$$

En d'autres termes, les coefficients de Fourier approchés de l'équation (6.11) sont composés de tous les coefficients exacts plus d'autres termes pour lesquels la fonction correspondante  $e^{inx} [N]$  ne peut pas être distinguée de la fonction  $e^{inx}$ . Ce phénomène est appelé l'"aliasing" (des modes de Fourier sont pris pour d'autres).

Malgré ce défaut, les méthodes pseudo-spectrales demeurent des méthodes intéressantes surtout en 3 dimensions. En effet, les TFD 3D se factorisent car  $e^{i\vec{k}\vec{x}} = e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z}$ . De plus, une TFD 3D se calcule comme une succession de TFD 1D : pour  $N^3$  points, on doit faire  $3N^2$

TFD 1D sur  $N$  points donc  $3N^3 \ln N$  opérations alors que les produits de convolution en 3D dans l'espace spectral nécessitent  $N^6$  opérations.

Ce passage par l'espace physique (et le recours à des méthodes pseudo-spectrales) est une astuce permettant un gain de temps de calcul, mais engendrant le problème d'aliasing.

### Correction de l'“aliasing”

Il n'est possible de corriger l'erreur d'“aliasing” sur le terme convolué qu'en éliminant les termes aliasés qui reviennent dans l'espace spectral  $|k| \leq N/2$ .

Sur un réseau de  $N$  points les valeurs de  $k$  tiennent dans l'intervalle  $[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$ , ainsi les valeurs de  $k_1 + k_2$  sont comprises entre  $-N$  et  $N$  mais sont repliées dans l'intervalle  $[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$  si on travaille modulo  $N$ . La méthode permettant de résoudre ce problème consiste à éliminer une partie du spectre (les modes hors de l'intervalle  $] -k_{max}, k_{max}[$ ) avec pour condition (pour une non-linéarité d'ordre 2) que :  $2k_{max} - N < -k_{max}$ , c'est à dire :  $k_{max} < \frac{N}{3}$ . On élimine donc toutes les valeurs du spectre supérieures à  $\frac{N}{3}$  et inférieures à  $-\frac{N}{3}$ . De cette façon toutes les valeurs “repliées” sont mises à zéro à chaque pas de temps et ne posent plus de problème.

On voit que la correction de l'“aliasing” est onéreuse : on perd un tiers des modes utiles aux calculs. Cependant les calculs effectués sont alors complètement équivalents aux calculs par troncature Galerkin. Nous allons voir que cela nous permet d'effectuer correctement des intégrations par partie.

### Intégration par partie et conservation de l'énergie

Supposons que la simulation ne soit pas “de-aliasée”. Considérons l'évaluation du produit de la quantité  $f$  par  $\partial_x g$  et intégrons le par partie dans l'espace spectral. On effectue les sommes dans l'intervalle  $] -N/2, N/2]$  :

$$TFD\left(f \frac{\partial g}{\partial x}\right)(n) = \sum_{j+k=n} [N] ik \hat{f}_N(j) \hat{g}_N(k) = \sum_{j+k=n} [N] i(n-j)_{[N]} \hat{f}_N(j) \hat{g}_N(k)$$

C'est ce  $(n-j)_{[N]}$  qui nous empêche alors d'effectuer l'intégration par partie de façon exacte. En “de-aliasant” la simulation, on effectue les sommes dans l'intervalle  $] -k_{max}, k_{max}[$ , et :

$$\begin{aligned} TFD\left(f \frac{\partial g}{\partial x}\right)(n) &= \sum_{j+k=n} ik \hat{f}_N(j) \hat{g}_N(k) = \sum_{j+k=n} i(n-j) \hat{f}_N(j) \hat{g}_N(k) \\ &= in \sum_{j+k=n} \hat{f}_N(j) \hat{g}_N(k) - \sum_{j+k=n} ij \hat{f}_N(j) \hat{g}_N(k) \\ &= TFD\left(\frac{\partial f g}{\partial x}\right)(n) - TFD\left(g \frac{\partial f}{\partial x}\right)(n) \end{aligned}$$

Rappelons que l'intégration par partie est une étape nécessaire pour démontrer la conservation de l'énergie. Prenons (pour l'exemple) de l'équation de Burgers 1D sans viscosité. Pour vérifier la conservation de l'énergie, on calcule :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int \frac{u(x)^2}{2} dx \right) = \int u \partial_t u dx = - \int u^2 \partial_x u dx = I \quad (6.12)$$



C'est par intégration par partie que l'on montre que le dernier terme est nul et que l'énergie est donc conservé :

$$I = - \int u^2 \partial_x u dx = -[u^3] + \int u \partial_x u^2 dx = 0 + 2 \int u^2 \partial_x u dx = -2I \quad (6.13)$$

Il en résulte que  $I = 0$ . La correction de l'aliasing permet d'effectuer ce calcul de façon exacte dans le domaine spectral (ce qui consiste simplement à prendre  $f = u^2$  et  $g = u$  dans le calcul présenté au dessus). Les méthodes pseudo-spectrales "de-aliasées" conservent donc exactement l'énergie.

### 6.1.4 Application à l'équation de Navier-Stokes

#### Représentation pseudo-spectrale

Les équations de Navier-Stokes 3D incompressible s'écrivent :

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} , \quad (6.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 . \quad (6.15)$$

L'écriture des coefficients des transformées de Fourier discrètes et tronquées se généralise à 3D comme suit :

$$\hat{\mathbf{u}}_N(\mathbf{k}) = \frac{1}{N^3} \sum_{n=1}^{N^3} \mathbf{u}(\mathbf{x}_n) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_n} \quad (6.16)$$

On effectue le "de-aliasing" (pour obtenir l'équivalence avec la troncature Galerkin) en annulant les coefficients de Fourier  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = 0$  pour  $|\mathbf{k}| > k_{\max}$ . Ceci nous permet d'écrire une equation discrète équivalente à l'équation 1.10 pour Navier-Stokes :

$$\partial_t \hat{u}_\alpha(\mathbf{k}, t) = -\nu k^2 \hat{u}_\alpha(\mathbf{k}, t) - \frac{i}{2} \mathcal{P}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{p}} \hat{u}_\beta(\mathbf{p}, t) \hat{u}_\gamma(\mathbf{k} - \mathbf{p}, t) \quad (6.17)$$

où la convolution dans (6.17) est tronquée à  $\sup_\alpha |k_\alpha| \leq k_{\max}$ ,  $\sup_\alpha |p_\alpha| \leq k_{\max}$  et  $\sup_\alpha |k_\alpha - p_\alpha| \leq k_{\max}$ , et on définit :

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{\alpha\beta\gamma} = k_\beta P_{\alpha\gamma} + k_\gamma P_{\alpha\beta} \\ P_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta / k^2 \end{cases} \quad (6.18)$$

#### Etapes de calcul

En notant  $L$  les termes linéaires et  $N$  les termes non linéaires faisant intervenir des produits de convolution dans l'espace spectral, l'implémentation des étapes de calcul est la suivante :

- dans l'espace de Fourier,  $\hat{u}_N$  est connu à l'instant  $t$ . On calcule la vorticité  $\hat{\omega}_N$  de  $\hat{u}_N$ ,
- $\hat{u}_N$  et  $\hat{\omega}_N$  sont projet  s dans l'espace physique, où on calcule leur produit vectoriel  $N_N(u_N)$ ,

- on projette  $N_N(u_N)$  dans l'espace de Fourier avec troncature pour désaliaser. On calcule alors  $\Delta^{-2} \left[ \nabla \cdot \left( \widehat{N_N(u_N)} \right) \right]$  ce qui donne la "pression cinétique" (au signe près) puis son gradient que l'on soustrait au terme non-linéaire.

- On utilise enfin un schéma temporel explicite pour le terme  $\widehat{N_N(u_N)}$  et implicite pour le terme linéaire. On avance le temps,  $t$  devient  $t + dt$ .

Le pas de temps se fait dans l'espace spectral. Il faut donc transformer une condition initiale physique en sa transformée de Fourier discrète pour faire le premier pas de temps.

## 6.2 Schémas temporels

Nous avons écrit des codes pseudo-spectraux aux conditions aux limites périodiques et à base de FFT [1] pour intégrer des équations aux dérivées partielles de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(u) + N(u)$$

où  $L$  désigne l'opérateur linéaire dans l'espace de Fourier et  $N$  le terme non linéaire. Nous avons utilisé des FFT cosinus-sinus pour nos codes périodiques. Il restait à préciser la méthode d'intégration temporelle.

### 6.2.1 Euler implicite explicite

La méthode de résolution en temps est une méthode des différences finies du second ordre. Le pas de temps est effectué par un "leapfrog" du second ordre pour le terme non linéaire, et une différence implicite de Crank-Nicolson du second ordre pour le terme visqueux :

$$u_{n+1} = \frac{(1 - \nu k^2 \Delta t) u_{n-1} + 2 \Delta t N(u_n)}{1 + \nu k^2 \Delta t}$$

Pour débiter l'intégration temporelle, nous effectuons le pas de temps "leapfrog" en divisant le pas de temps par deux et tel que  $u_{-1} = u_0$ , ce qui équivaut à un pas de temps Euler pour  $u$  qui est globalement d'ordre 1 :

$$u_1 = \frac{(1 - \nu k^2 \Delta t / 2) u_0 + \Delta t N(u_0)}{1 + \nu k^2 \Delta t / 2} \sim (1 - \nu k^2 \Delta t) u_0 + \Delta t N(u_0) + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

### 6.2.2 Instabilités

Les pas de temps Euler implicite explicite mènent à des instabilités numériques de deux types.

La première vient du terme non linéaire. Considérons une perturbation  $u_n$  a un écoulement stationnaire  $U$ . Alors on effectue les pas de temps comme suit :

$$\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2 \Delta t} = -ikU u_n$$

Les solutions de l'équation caractéristique du second ordre en  $\lambda$  associée sont :

- si  $Uk * \Delta t < 1$ ,  $\lambda = -iUk * \Delta t \pm \sqrt{1 - (Uk * \Delta t)^2}$  dont le module vaut 1.
- si  $Uk \Delta t > 1$ ,  $\lambda = -iUk * \Delta t \pm i \sqrt{-1 + (Uk * \Delta t)^2}$ , solutions imaginaires purs dont l'une est

de module plus grand que 1, ce qui conduit à une divergence de la perturbation.

Cette instabilité est donc dite conditionnelle, puisqu'il suffit que  $U_{max}k_{max} * \Delta t < 1$  pour qu'elle ne se développe pas. Il suffit donc de choisir un pas de temps suffisamment petit pour éviter de la voir se manifester.

Pour éviter une instabilité venant des termes linéaires, on implémente le terme linéaire :  $Lu_n = L \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2}$ . Il n'y a alors plus de divergence possible puisque :  $u_{n+1} = \alpha u_{n-1}$  ou  $\alpha = \frac{1+L\Delta t}{1-L\Delta t}$  est de module inférieur à 1 ( $L = -\nu k^2$  est en effet négatif). La seconde instabilité vient du leapfrog également. Au voisinage d'un point fixe attractif, un calcul identique au précédent (avec  $\alpha = iUk$  reel) mène à une oscillation entre termes pair et impair de la vitesse. On résout cette nouvelle instabilité en mélangeant les pas de temps pairs et impairs périodiquement en introduisant une étape de mélange de la forme :

$$\tilde{u}(t) = \frac{1}{4} (u(t - \Delta t) + 2u(t) + u(t + \Delta t)).$$

sans incrémenter le temps. Remarquons que ce schéma est invariant en  $\Delta t \rightarrow -\Delta t$ .

### 6.2.3 Runge Kutta d'ordre 4

Une méthode d'ordre 4 en temps remplaçant le mixing des pas de temps pairs et impairs est utilisée lors de la relaxation vers l'équilibre absolu de l'écoulement de Taylor-Green régi par l'équation d'Euler. En effet, le mixing précédent conserve mal l'énergie. Nous avons implémenté la méthode Runge-Kutta d'ordre 4 présentée dans le chapitre 15 de Numerical Recipes- Cambridge University Press. Le schéma d'un pas Runge-Kutta d'ordre 4 consiste dans notre cas à calculer  $u_{n+1}$  comme la somme pondérée de 4 pas de temps Euler d'ordre 1 (introduit ci-dessus) :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}$$

avec :

$$\begin{aligned} k_1 &= Euler(u_n) \\ k_2 &= Euler(u_n + k_1/2) \\ k_3 &= Euler(u_n + k_2/2) \\ k_4 &= Euler(u_n + k_3) \end{aligned}$$

Ce pas de temps ne nécessite qu'un pas de temps antérieur pour être mis en oeuvre. Il permet ainsi d'éviter tout mixing puisque les pas de temps pairs et impairs sont automatiquement recouplés par un tel pas de temps : les éventuelles instabilités sont ainsi périodiquement annulées.

Dans la perspective de conserver au mieux l'énergie, il aurait été préférable d'effectuer tous les pas de temps en Runge-Kutta d'ordre 4. Mais ce pas de temps est coûteux. On a donc choisi d'utiliser ce pas de temps peu fréquemment, mais assez souvent pour tuer les éventuelles instabilités du "leapfrog" : tous les 23 pas de temps. On peut comparer le gain en précision par rapport à un mixing, et aussi mesurer la précision que l'on pourrait atteindre en n'effectuant que des Runge-Kutta.

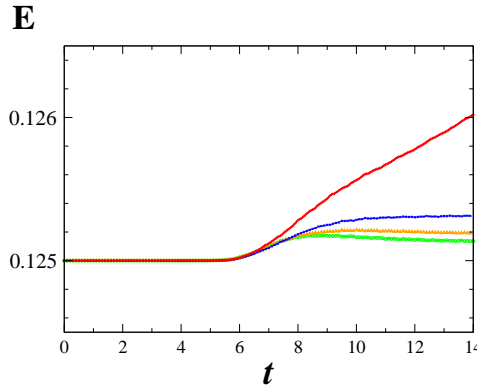


FIGURE 6.1 – Vérification de la conservation de l'énergie pour les différentes résolutions (pas Euler périodiquement remplacé par un Runge-Kutta d'ordre 4). L'énergie initiale de chaque simulation vaut  $1/8$ .

### 6.3 Symétries du Taylor Green et optimisation du code

Le Vortex de Taylor-Green forcé est l'écoulement qui s'établit à partir de la condition initiale  $\mathbf{u}_{(t=0)} = \mathbf{v}_{TG}$ , en suivant la dynamique de Navier-Stokes, où  $\mathbf{v}_{TG}$  représente :

$$\begin{aligned} v_X^{TG} &= \sin(x) \cos(y) \cos(z) \\ v_Y^{TG} &= -\cos(x) \sin(y) \cos(z) \\ v_Z^{TG} &= 0 \end{aligned} \tag{6.19}$$

L'écoulement ainsi défini présente des symétries :

- réflexion dans les plans  $x = 0, \pi$ ;  $y = 0, \pi$ ;  $z = 0, \pi$
- invariances par rotation : \*  $\pi/2$  autour de l'axe  $x = y = \pi/2$   
\*  $\pi$  autour de l'axe  $x = z = \pi/2$   
\*  $\pi$  autour de l'axe  $y = z = \pi/2$

C'est cet ensemble de symétrie qui est implémenté dans le code "symétrique". La symétrie de rotation de  $\pi/2$  peut être supprimée en prenant 3 composantes indépendantes de la vitesse. Par ailleurs, les symétries de rotation de  $\pi$  peuvent être supprimées en prenant des champs dont toutes les composantes de Fourier sont soit des sinus soit des cosinus, indépendants paires ou impaires (et non toutes soit paires soit impaires comme c'est le cas dans le code symétrique).

Les symétries du champ de vitesse du Taylor-Green (TG) (6.19) mises en oeuvre dans notre code sont des symétries de rotation d'angle  $\pi$  autour des axes  $(x = z = \pi/2)$ ,  $(y = z = \pi/2)$  et  $(x = y = \pi/2)$ , ainsi que des symétries miroir par rapport aux plans  $x = 0, \pi$ ,  $y = 0, \pi$ ,  $z = 0, \pi$ . La vitesse d'advection est parallèle à ces plans qui forment les cotés d'une "boite imperméable" qui confine l'écoulement. Il a été démontré dans la référence [5] que ces symétries sont équivalentes au développement de Fourier suivant pour le champs de vitesse  $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ ,

solution des équations de Navier-Stokes avec pour conditions initiales  $\mathbf{v}_{TG}$  (6.19) :

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z, t) &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{N-1} \hat{u}_x(m, n, p, t) \sin mx \cos ny \cos pz, \\ u_y(x, y, z, t) &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{N-1} \hat{u}_y(m, n, p, t) \cos mx \sin ny \cos pz, \\ u_z(x, y, z, t) &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{N-1} \hat{u}_z(m, n, p, t) \cos mx \cos ny \sin pz \end{aligned}$$

où  $\hat{\mathbf{u}}(m, n, p, t)$  est nul à moins que  $m, n, p$  soient tous des entiers soit pairs, soit impairs. Il existe d'autres relations entre les coefficients du développement correspondant aux symétries par rotation (évoquées plus haut) d'angle  $\pi/2$  autour des axes ( $x = y = \pi/2$ ) :

$$\begin{aligned} \hat{u}_x(m, n, p, t) &= (-1)^r \hat{u}_y(n, m, p, t), \\ \hat{u}_z(m, n, p, t) &= (-1)^r \hat{u}_z(n, m, p, t) \end{aligned}$$

avec  $r = 1$  si  $m, n, p$  sont tous impairs et  $r = 2$  si  $m, n, p$  sont tous pairs.

Ces relations nous permettent ainsi de ne calculer que 2 composantes sur les 3 du champs de vitesse. L'utilisation d'un développement sur des entiers tous pairs ou tous impairs permet de gagner un facteur 4 en taille mémoire et temps cpu. De plus, les transformées de Fourier sinus-cosinus permettent de gagner un facteur 8 en temps par rapport à des transformées de Fourier périodiques générales. Le gain total est un facteur 48 en encombrement mémoire et temps cpu.

## 6.4 Méthode Monte Carlo

### 6.4.1 Générateur de nombre aléatoire

Le générateur de nombre aléatoire a été trouvé dans la référence [57].

### 6.4.2 Génération de conditions initiales aléatoires

Pour générer des champs de vitesse dans l'espace spectral ayant sur chaque mode une distribution aléatoire gaussienne, il nous faut utiliser le générateur de nombre aléatoire précédent, puis adapter le champ créé aux conditions d'incompressibilité : cela revient simplement à projeter ce champ de vitesse sur les fonctions de divergence nulle (grâce au projecteur  $P_{\alpha\beta}$  introduit par l'équation 6.18). Enfin il faut normaliser le champ pour fixer sa température.

## **Chapitre 7**

### **Articles publiés**





Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)



**FLUID DYNAMICS  
RESEARCH**

Fluid Dynamics Research 36 (2005) 239–248

# Evolution of complex singularities in Kida–Pelz and Taylor–Green inviscid flows

C. Cichowlas, M.-E. Brachet\*

*Laboratoire de Physique Statistique de l'Ecole Normale Supérieure, associé au CNRS et aux Universités Paris VI et VII,  
24 Rue Lhomond, 75231 Paris, France*

Received 19 November 2003; received in revised form 20 July 2004; accepted 21 September 2004

Communicated by S. Kida

## Abstract

The analyticity strip method is used to trace complex singularities in direct numerical simulations of the Kida–Pelz and Taylor–Green flows, performed with up to  $2048^3$  collocation points. Oscillations found in the Kida–Pelz energy spectrum are attributed to interferences of complex singularities. A generalized least-square fit that separates out the oscillations from the measure of the width of the analyticity strip  $\delta$  is introduced. Using the available resolution,  $\delta$  is found to decay exponentially in time up to  $t = 1.25$ . It is argued that resolutions in the range  $16384^3$ – $32768^3$  (within reach of the Earth Simulator) are needed to really probe the Pelz singularity at  $t \sim 2$ .

© 2005 Published by The Japan Society of Fluid Mechanics and Elsevier B.V. All rights reserved.

PACS: 47.11.+j; 02.40.Xx; 02.60.Cb; 02.70.Hm

**Keywords:** Euler equation; Interferences; Complex singularities

## 1. Introduction

The existence of a finite-time infinite-vorticity singularity in three-dimensional incompressible Euler flow developing from smooth initial conditions is still an open mathematical problem (Frisch et al., 2003).

\* Corresponding author. Tel.: +33 144323761; fax: +33 144323433.

E-mail address: [marc\\_brachet@noos.fr](mailto:marc_brachet@noos.fr) (M.-E. Brachet).



One possible approach to this problem is the so-called analyticity strip method (Sulem et al., 1983). The basic idea of this method is to trace complex singularities numerically on direct numerical simulations (DNS) of the Euler equation with enough spatial resolution to capture the exponential tails in the Fourier transforms. The logarithmic decrement of the energy spectrum at high- $k$  is twice the width  $\delta(t)$  of the analyticity strip of the velocity field and the problem of blowup reduces to check if  $\delta(t)$  vanishes in a finite time.

This method has been applied to three-dimensional Euler flows generated by the Taylor and Green (1937) (TG) initial conditions, with resolutions  $256^3$  (Brachet et al., 1983) and  $864^3$  (Brachet et al., 1992). It was observed that, after an early transient period, the width of the analyticity strip of the velocity field decayed exponentially in time.

The Kida–Pelz (KP) flow was introduced by Kida (1985). It has all the symmetries of the TG vortex and also displays additional symmetries that make it invariant under the full octahedral group (Pelz, 2001). This flow was used by Pelz (2003), Pelz and Gulak (1997a, b), Boratav and Pelz (1994b) to study the problem of Euler blowup, using temporal Taylor series expansions. It was also used by Boratav and Pelz (1994a) to make DNS of viscous turbulence.

It has been argued by Kerr (1993) that more symmetries than the ones present in the TG vortex are needed in order to observe a singularity. Thus, the KP flow could well be a better candidate for finite time singularity than the TG flow.

The main purpose of this paper is to apply the analyticity strip method to DNS of the TG and KP flows with resolutions up to  $2048^3$ . It will turn out to be necessary to generalize the least square fit used to extract  $\delta(t)$  from the energy spectrum so that the fit takes into account oscillations that are found in the KP energy spectrum.

The paper is organized as follows. Section 2 contains a short description of the (standard) numerical methods used to integrate the Euler equation. Section 3 contains the generalization of the least square fit and numerical results. Finally Section 4 is our conclusion.

## 2. Numerical approach

The three-dimensional incompressible Euler equations,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

with  $(2\pi$ -periodic) initial data are solved numerically using standard (Gottlieb and Orszag, 1977) pseudo-spectral methods with resolution  $N$ . Time marching is done with a second-order leapfrog finite-difference scheme. The solutions are dealiased by suppressing, at each time step, the modes for which at least one wave-vector component exceeds two-thirds of the maximum wave-number  $N/2$  (thus a  $2048^3$  run is truncated at  $k_{\max} = 682$ ). Symmetries are used in a standard way (Brachet et al., 1983) to reduce memory storage and speed up computations.

Two types of computations, corresponding to different initial conditions, are carried out. The first type concerns the Taylor–Green vortex (Taylor and Green, 1937) which is the incompressible

three-dimensional flow developing from the single-mode initial data

$$u^{\text{TG}} = \sin(x) \cos(y) \cos(z), \quad v^{\text{TG}} = -u^{\text{TG}}(y, -x, z), \quad w^{\text{TG}} = 0. \quad (3)$$

The second type of runs concerns the Kida–Pelz (Kida, 1985; Pelz, 2001; Boratav and Pelz, 1994b) flow, that develops from the initial data

$$u^{\text{KP}} = \sin(x)(\cos(3y) \cos(z) - \cos(y) \cos(3z)), \quad v^{\text{KP}} = u^{\text{KP}}(y, z, x), \quad w^{\text{KP}} = u^{\text{KP}}(z, x, y). \quad (4)$$

Series of runs are made for the two flows by varying the resolution  $N$ .

Two quantities are extracted from the runs, in order to monitor the time-evolution of the flows. The energy spectrum is defined by averaging  $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}', t)$  (the spatial Fourier transform of the solution to Eq. (1)) on spherical shells of width  $\Delta k = 1$ ,

$$E(k, t) = \frac{1}{2} \sum_{k-\Delta k/2 < |\mathbf{k}'| < k+\Delta k/2} |\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}', t)|^2 \quad (5)$$

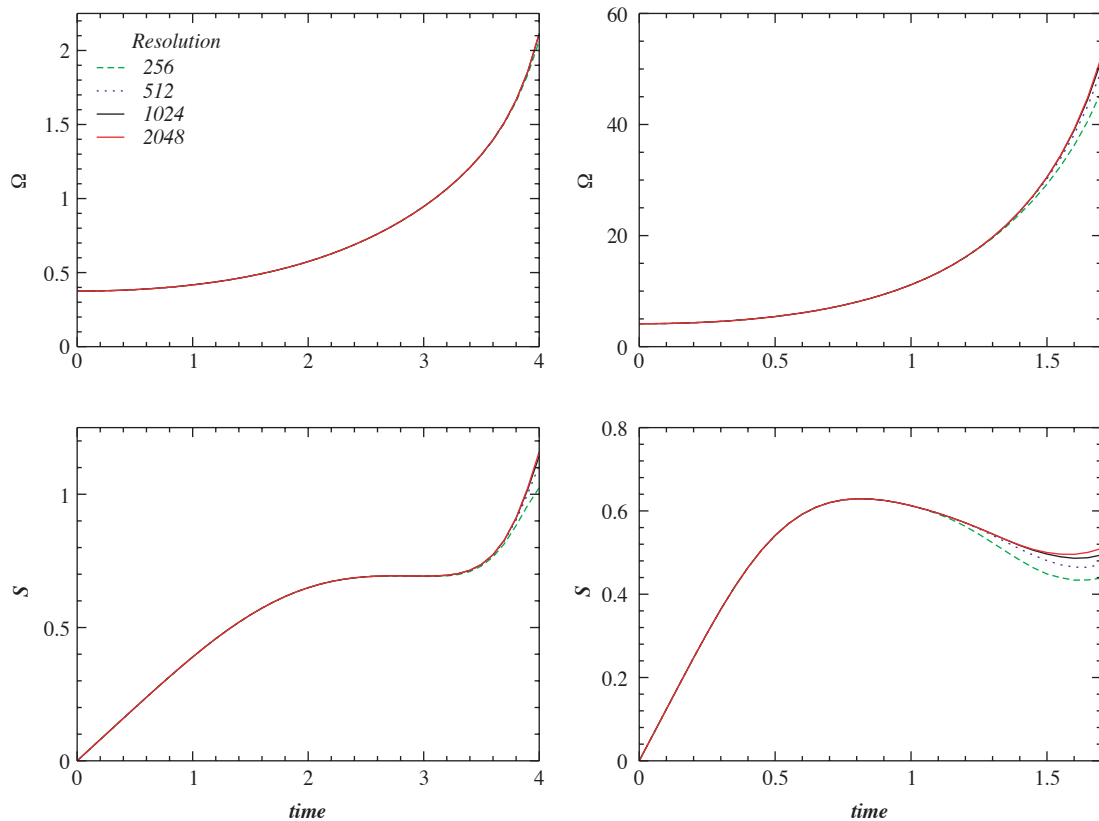


Fig. 1. Enstrophy  $\Omega(t)$  and its normalized time derivative  $S(t)$  (see Eq. (7)) for the TG flow (left) and KP flow (right) at various resolutions.

and the enstrophy  $\Omega(t) = \int_0^\infty k^2 E(k, t) dk$ , that is computed directly (i.e. without shell averaging) as

$$\Omega(t) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}'} |\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}', t)|^2 \mathbf{k}'^2. \quad (6)$$

Fig. 1 displays the time variation of the enstrophy  $\Omega(t)$  and of its normalized time derivative

$$S(t) = \left( \frac{135}{98} \right)^{1/2} \Omega^{-3/2} \frac{d\Omega}{dt} \quad (7)$$

(which identifies with the skewness when isotropy is assumed (Brachet et al., 1983)).

Note that (7) implies  $\Omega(t)^{-1/2} = \Omega(0)^{-1/2} - (392/135)^{1/2} \int_0^t ds S(s)$ . Thus  $S(t)$  should tend to zero when  $t$  goes to infinity in order to prevent a finite-time blowup of the enstrophy. Such a decay is not visible in Fig. 1. The integration time is in fact too short to reveal the asymptotic behavior of  $S$  and  $\Omega$ . We will see below that more resolution is needed to extend the integration time.

### 3. Tracing complex singularities

When the velocity field is analytic, the energy spectrum  $E(k, t)$  decays exponentially at large  $k$  (with a possible algebraic prefactor). The logarithmic decrement is twice the width  $\delta(t)$  of the analyticity strip of the solution continued to complex spatial variables. The basic idea of the analyticity strip method (Sulem et al., 1983) is to trace the temporal behavior of  $\delta(t)$  in order to obtain evidence for or against blowup.

In order to extract  $\delta(t)$  from the numerical integrations a least-square fit is performed on the logarithm of the computed energy spectrum, using the functional form

$$\log(E(k, t)) = C - n \log(k) - 2\delta k. \quad (8)$$

The error on the fit interval  $k_1 \leq k \leq k_2$ ,

$$\chi^2 = \sum_{k_1 \leq k_i \leq k_2} (\log(E(k_i, t)) - (C - n \log(k_i) - 2\delta k_i))^2 \quad (9)$$

is minimized by solving the equations  $\partial\chi^2/\partial C = 0$ ,  $\partial\chi^2/\partial n = 0$  and  $\partial\chi^2/\partial\delta = 0$ . Note that these equations are linear in the fit parameters  $C$ ,  $n$  and  $\delta$ .

Examples of KP and TG energy spectra to be fitted in such a way are presented in Fig. 2. It is apparent on the figure that resolution-dependent spectral even–odd oscillations are present, at certain times, on the TG energy spectrum. Note that this behavior is controlled by the round-off error  $\sim 10^{-15}$ . For a given precision and resolution, the maximum time up to which the simulation is reliable should be the first instance at which the value of the spectrum at the highest wavenumber becomes comparable to the square of the round-off error. However, these round-off errors only affect the highest wavenumbers of the TG energy spectrum. They are eliminated by averaging the TG spectrum on shells of width  $\Delta k = 2$  before performing the fit (Brachet et al., 1983). Note that longer period oscillations are visible on the KP energy spectra, but that no strong resolution-dependent effect can be seen.

The measure of  $\delta(t)$  is reliable as long as it remains larger than a few mesh sizes, a condition required for the smallest scales to be accurately resolved and spectral convergence ensured. Thus only the fits giving a value of  $\delta$  such that  $\delta k_{\max} > 2$  will be considered.

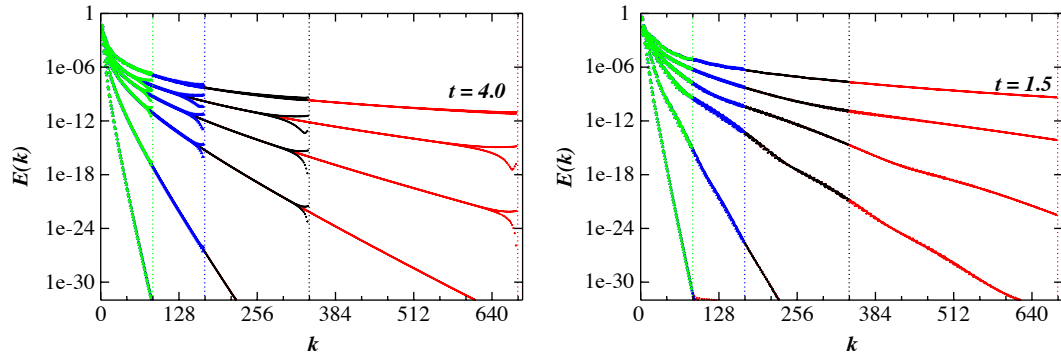


Fig. 2. Energy spectra at resolutions  $256^3$ ,  $512^3$ ,  $1024^3$  and  $2048^3$ ; the spectral cut-off is indicated, for each resolution, by the vertical dotted-lines. Left TG flow at  $t = (1.3, 1.9, 2.5, 2.9, 3.4, 4.0)$ ; right KP flow at  $t = (0.25, 0.5, 0.75, 0.9, 1.1, 1.5)$ .

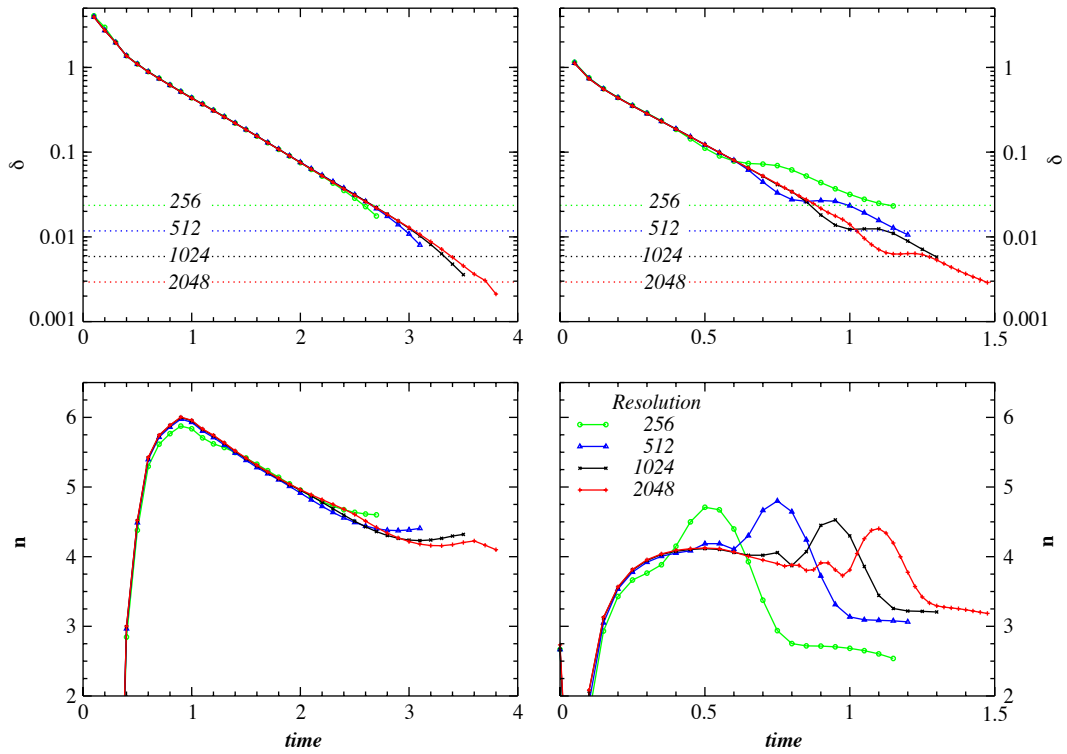


Fig. 3. Time evolution of decrement  $\delta$  and prefactor  $n$  for TG flow (left) and KP flow (right) at various resolutions (see Eq. (8)). Fits are performed within the intervals  $k = 5$  to  $\min(k^*, N/3)$ , where  $k^* = \min_{E(k) < 10^{-32}}(k)$  marks the beginning of roundoff noise at short times.

Fig. 3 displays the values of  $\delta$  and  $n$  for the TG and KP flows. It is visible that, after a short transient period, the TG flow  $\delta(t)$  decays like

$$\delta(t) = \delta_0^{\text{TG}} e^{-t/T_{\text{TG}}} \quad (10)$$

with a characteristic decay time  $T_{TG} = 0.56$  and  $\delta_0^{TG} = 2.70$ , up to a time  $t = 3.7$  at resolution  $2048^3$  when it becomes comparable to twice the smallest resolved scale.

In contrast, it is apparent on the right pannels of Fig. 3 that the behavior of  $\delta$  and  $n$  in the KP flow is erratic and that their values are not stable when the resolution is changed. This happens even though the higher resolution energy spectrum has identical low-wavenumber values than the lower resolution energy spectrum (see Fig. 2). This kind of behavior is possible only if some kind of systematic error is present in the fit procedure. It is plausible that this error comes from the long period oscillations slightly visible on the KP energy spectra displayed in Fig. 2.

In order to take this oscillation into account, we generalize the functional form of (8) to

$$\log(E(k, t)) = C - n \log(k) - 2\delta k + a \cos\left(2\pi \frac{k}{k_p}\right). \quad (11)$$

The least square fit equations determining the values of the parameters  $C$ ,  $n$ ,  $\delta$  and  $a$  are linear but the one determining  $k_p$  is non-linear. In practice we determine  $C$ ,  $n$ ,  $\delta$  and  $a$  for an assumed value of  $k_p$  and search for the minimum of the sum of the square of the errors as a function of  $k_p$ .

Note that assuming interferences from two complex singularities with the same value of  $\delta$  but spatial positions differing by  $2\delta_i$  and contrast factor  $a$  would yield contributions to the energy spectrum of the form

$$E(k) \sim e^{-2\delta k} (1 + a \cos 2\delta_i k). \quad (12)$$

Expanding the log of this expression to the first order in  $a$  yields the additional term present in (11), with  $k_p = \pi/\delta_i$ .

The presence of a contrast factor may be understood, as in optics, by considering interfering singularities that are not punctual but extended objects. Indeed there is good numerical evidence (Frisch et al., 2003) that complex singularities of the two-dimensional Euler equations are situated on regular 1D manifolds. Note that, in the case of the viscous 1-D Burgers equation, where the nature of the complex singularities (isolated poles) is well-understood, there is another way than the present fitting procedure to disentangle the information on  $\delta$  from the oscillating energy spectrum (Kida, 1986). However in the Burgers case the contrast factor  $a$  is constantly high.

The residual oscillating part of the data, together with the fit, are displayed in Fig. 4. It is clear by inspection of the figure that the quality of the fit is correct.

It is apparent in Fig. 5 that the erratic behavior of  $\delta$  and  $n$  manifest in Fig. 3 has been corrected by the extended fit (11). Perhaps the most salient effect is observed on  $n$ . The resolution dependent sharp maxima of  $n$  visible in Fig. 3 are not present in Fig. 5. The corresponding behavior of  $\delta$  has also been smoothed out.

The fitted singularity separation parameter  $\delta_i = \pi/k_p$  and amplitudes  $a$  are also presented in Fig. 5.  $\delta_i$  appears to decay exponentially in time (with  $\delta_i(t) = 0.30e^{-t/0.271}$  up to a time  $t = 1.25$  at resolution  $2048^3$ ). The amplitudes have resolution dependent maxima that happen at the same time than the resolution dependent maxima of the uncorrected  $n$  (see Fig. 3). It is easy to check out that these maxima happen when  $k_p \sim k_{\max}$ .

This point is easily understood as follows. When  $k_p \ll k_{\max}$ , the oscillations are averaged out in the uncorrected fit (8) and both corrected and uncorrected fits give the same values of  $n$  and  $\delta$ . In the opposite regime  $k_p \gg k_{\max}$  no oscillations can be detected on the available data. In the intermediate regime, when  $k_p$  approaches  $k_{\max}$  from below, the curvature of the spectrum caused by the oscillation is seen by the

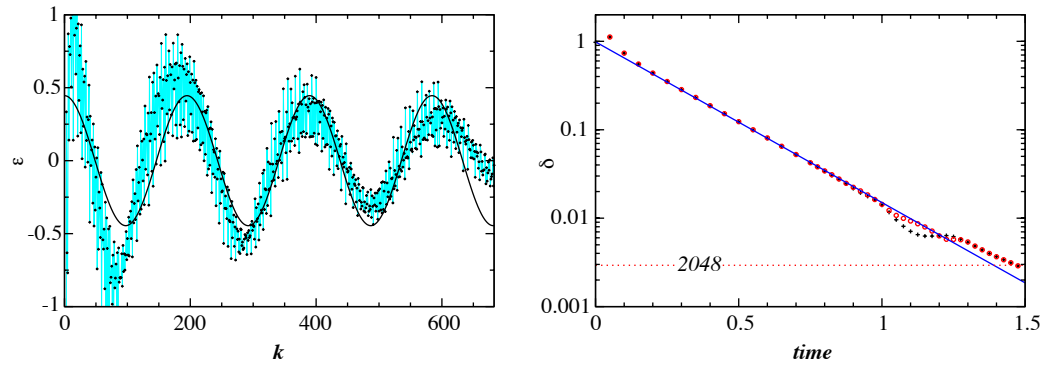


Fig. 4. Left: Fit of spectral oscillations of KP flow ( $t=0.8$ , resolution  $2048^3$ ) dots: residual  $\varepsilon = \log(E(k, t)) - (C - n \log(k) - 2\delta k)$ ; solid line: amplitude term  $a \cos(2\pi \frac{k}{k_p})$  (see Eq. (11)). Right: time evolution of uncorrected decrement  $\delta$  (Eq. (8): cross +), corrected decrement (Eq. (11), circle  $\circ$ ) and its exponential fit from  $t = 0.1$  to  $t = 1.25$  (solid line).

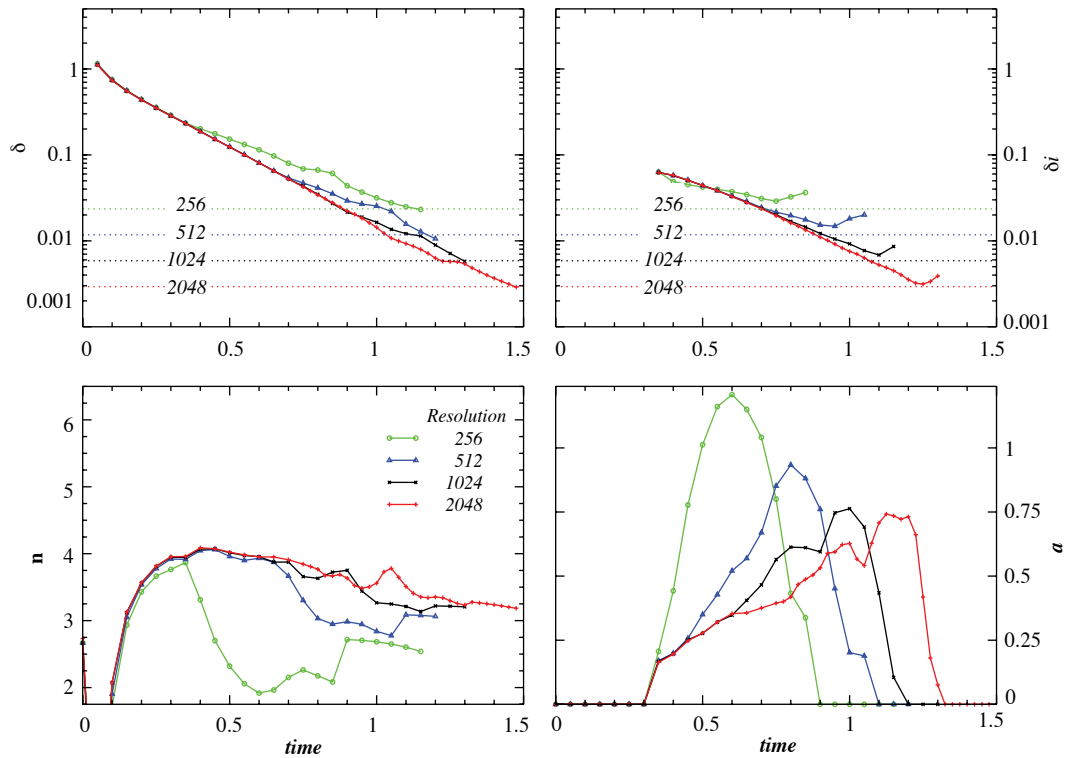


Fig. 5. Time evolution of corrected decrement  $\delta$ , corrected prefactor  $n$ , oscillation amplitude  $a$  and separation parameter  $\delta_i = \pi/k_p$  for KP flow at various resolutions  $N$  (see Eq. (11)). Fits are performed within the intervals  $k = 5$  to  $\min(k^*, N/3)$ , where  $k^* = \min_{E(k) < 10^{-32}}(k)$  marks the beginning of roundoff noise at short times.

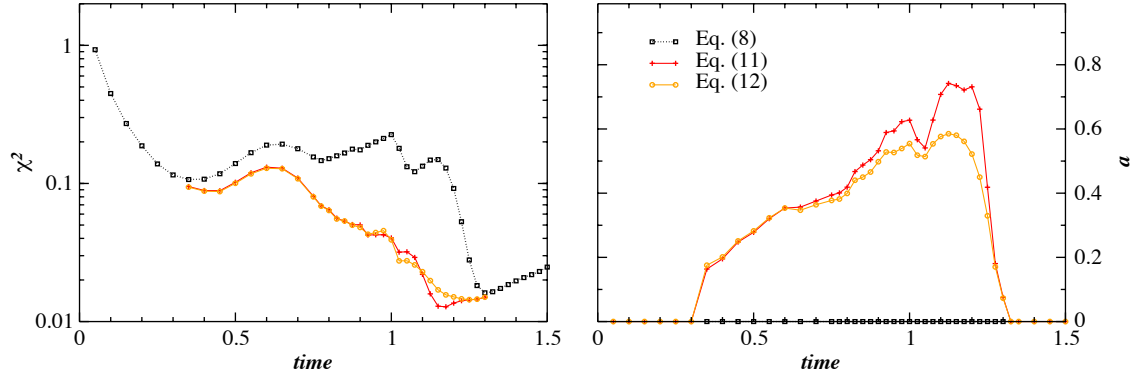


Fig. 6. Left: quadratic error  $\chi^2$ , normalized by the number of fitted points, corresponding to the 3 different least-square fits at resolution  $2048^3$ . Right: comparison of amplitudes  $a$ . Square, Eq. (8); cross, Eq. (11); circle, Eq. (12).

uncorrected fit as a change in the  $n$  term in (8). The corrected fit (11) does a better job separating out, in this regime, the oscillation from the curvature.

Using the data on  $\delta$  obtained from the corrected fit (see Fig. 4), we obtain that  $\delta(t)$  decays like

$$\delta(t) = \delta_0^{\text{KP}} e^{-t/T_{\text{KP}}} \quad (13)$$

with a characteristic decay time  $T_{\text{KP}} = 0.24$  and  $\delta_0^{\text{KP}} = 1.02$ , up to a time  $t = 1.25$  at resolution  $2048^3$ , where the corrected fit begins to be affected.

By inspection of Fig. 5 it is apparent that the amplitude  $a$  of the fit near its maxima almost reaches one, which is not consistent with the approximation (i.e. using  $a \ll 1$  to expand the log of (12)) needed to derive (11). This suggests that a fit using the logarithm of (12) may give an even better result. In order to investigate this point, we have performed these logarithmic fits. Note that this necessitates to search for the minimum of a 2-parameter function (see the discussion below Eq. (11)).

The results are presented in Fig. 6. It is apparent, by inspection of the figure, that the quality of the fit, measured by the quadratic error  $\chi^2$ , normalized by the number of fitted points, is much improved when the oscillations are taken into account. However, the level of improvement is not sensibly changed by replacing the 1-parameter non-linear fit Eq. (11) by the 2-parameter non-linear fit Eq. (12). The behavior of  $\delta$  and  $n$  are not sensibly affected (data not shown) but the amplitude  $a$  is decreased when using the logarithm of (12).

#### 4. Conclusion

In summary, complex singularities in DNS (resolutions up to  $2048^3$ ) of TG and KP flows, have been traced, using the analyticity strip method. The energy spectra fit procedure had to be generalized to take into account oscillations caused by interferences between complex singularities. Exponential-in-time decay of  $\delta$  is found for both flows.

The temporal Taylor series expansions estimates for the Pelz singularity time  $t_p^*$  given by Pelz (2003), Pelz and Gulak (1997a, b), Boratav and Pelz (1994b) are  $t_p^* \sim 2$ .

We now estimate, using data generated by the present DNS with resolution up to  $2048^3$ , how much resolution is needed to reach  $t_p^*$ , assuming that the exponential regime (13) persists in time. The condition that  $\delta k_{\max} = 2$  reads  $\delta k_{\max} = N/3\delta_0^{\text{KP}} e^{-t_p^*/T_{\text{KP}}} = 2$  and its solution is  $N = 6e^{2/T_{\text{KP}}}/\delta_0^{\text{KP}} = 24\,472$ . Note that the same condition  $\delta_i k_{\max} = 2$  applied to the imaginary part of singularities yields  $N = 32\,074$ , a more stringent condition.

Thus DNS performed with resolutions in the range  $16384^3$ – $32768^3$  would really probe the Pelz singularity at  $t_p^* \sim 2$ . Assuming a real singularity at this time, they should display a numerically-reliable faster-than-exponential decay of  $\delta(t)$ .

General periodic turbulent flows have been simulated with resolutions up to  $4096^3$  on the Earth Simulator (Kaneda et al., 2003). Efficient implementation of the TG and KP symmetries reduce memory storage and speed up computation allowing a gain in resolution up to a factor 4 in each spatial direction (Brachet et al., 1983). Thus KP simulations with resolutions  $16384^3$  are within reach of the Earth Simulator.

## Acknowledgements

This paper is dedicated to the memory of Professor Richard Pelz. Computations were performed on a NEC SX-5 machine at the Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique.

## References

- Boratav, O.N., Pelz, R.B., 1994a. Direct numerical simulation of transition to turbulence from a high-symmetry initial condition. *Phys. Fluids* 6 (8), 2757–2784.
- Boratav, O.N., Pelz, R.B., 1994b. Evidence for a real-time singularity in hydrodynamics from time series analysis. *Phys. Rev. Lett.* 79, 4998–5001.
- Brachet, M.E., Meiron, D.I., Orszag, S.A., Nickel, B.G., Morf, R.H., Frisch, U., 1983. Small-scale structure of the Taylor–Green vortex. *J. Fluid Mech.* 130, 411–452.
- Brachet, M.E., Meneguzzi, M., Vincent, A., Politano, H., Sulem, P.L., 1992. Numerical evidence of smooth self-similar dynamics for three-dimensional ideal flows. *Phys. Fluids A* 4, 2845–2854.
- Frisch, U., Matsumoto, T., Bec, J., 2003. Singularities of Euler flow? not out of the blue! *J. Stat. Phys.* 113, 761–781.
- Gottlieb, D., Orszag, S.A., 1977. *Numerical Analysis of Spectral Methods*. SIAM, Philadelphia.
- Kaneda, Y., Ishihara, T., Yokokawa, M., Itakura, K., Uno, A., 2003. Energy dissipation rate and energy spectrum in high resolution direct numerical simulations of turbulence in a periodic box. *Phys. Fluids* 15, 121–124.
- Kerr, R.M., 1993. Evidence for a singularity of the three-dimensional incompressible Euler equations. *Phys. Fluids A* 5, 1725–1746.
- Kida, S., 1985. Three-dimensional periodic flows with high symmetry. *J. Phys. Soc. Japan* 54, 2132–2136.
- Kida, S., 1986. Study of complex singularities by filtered spectral method. *J. Phys. Soc. Japan* 55, 1542–1555.
- Pelz, R.B., 2001. Symmetry and the hydrodynamic blowup problem. *J. Fluid Mech.* 444, 343–382.
- Pelz, R.B., 2003. Extended series analysis of full octahedral flow: numerical evidence for hydrodynamic blowup. *Fluid Dynam. Res.* 33, 207–221.
- Pelz, R.B., Gulak, Y., 1997a. Evidence for a real-time singularity in hydrodynamics from time series analysis. *Phys. Rev. Lett.* 79, 4998–5001.



248

*C. Cichowlas, M.-E. Brachet / Fluid Dynamics Research 36 (2005) 239–248*

Pelz, R.B., Gulak, Y., 1997b. Locally self-similar finite-time collapse in a high-symmetry vortex-filament model. *Phys. Rev. E* 55, 1617–1626.

Sulem, C., Sulem, P.L., Frisch, H., 1983. Tracing complex singularities with spectral methods. *J. Comput. Phys.* 50 (1), 138–161.

Taylor, G.I., Green, A.E., 1937. Mechanism of the production of small eddies from large ones. *Proc. Roy. Soc. London A* 158, 499–521.

# EVOLUTION OF COMPLEX SINGULARITIES AND KOLMOGOROV SCALING IN TRUNCATED 3-D EULER FLOWS

Cyril Cichowlas

*Laboratoire de Physique Statistique de l'Ecole Normale Supérieure,  
associé au CNRS et aux Universités Paris VI et VII, 24 Rue Lhomond, 75231 Paris, France*  
cichowla@clipper.ens.fr

Fabrice Debbasch

*ERGA, CNRS UMR 8112,  
4 Place Jussieu,  
F-75231 Paris Cedex 05, France*  
fabrice.debbasch@wanadoo.fr

Marc Brachet

*Laboratoire de Physique Statistique de l'Ecole Normale Supérieure,  
associé au CNRS et aux Universités Paris VI et VII, 24 Rue Lhomond, 75231 Paris, France*  
brachet@lps.ens.fr

**Abstract** The analyticity strip method is used to trace complex singularities in direct numerical simulations of the Taylor-Green flows, performed with up to  $2048^3$  collocation points. No indication of finite-time real singularity is found. Simulations are also carried out beyond the time at which the truncated equations cease to approximate the original Euler equations. Kolmogorov-like turbulence is then obtained during an intermediate regime of the spontaneous relaxation of (time-reversible) spectrally-truncated Euler equations towards absolute equilibrium.

**Keywords:** Incompressible perfect fluid, finite time singularity, absolute equilibrium, Kolmogorov turbulence

## 1. Introduction

The purpose of the present contribution is to study the dynamics of spectrally truncated 3-D incompressible Euler flows. Two quite different regimes are investigated.

The first regime is related to the possible existence of a finite-time infinite-vorticity singularity in three-dimensional incompressible Euler flow developing from smooth initial conditions. This is still an open mathematical problem (Frisch *et al.*, 2003). One possible approach to the problem is the so-called analyticity strip method (Sulem *et al.*, 1983). The basic idea of this method is to trace complex singularities numerically on direct numerical simulations (DNS) of the Euler equation with enough spatial resolution to capture the exponential tails in the Fourier transforms. The logarithmic decrement of the energy spectrum at high- $k$  is twice the width  $\delta(t)$  of the analyticity strip of the velocity field and the problem of blowup comes down to checking if  $\delta(t)$  vanishes in a finite time. This method has been applied to three-dimensional Euler flows generated by the Taylor & Green (1937) (TG) initial conditions, with resolutions  $256^3$  (Brachet *et al.*, 1983) and  $864^3$  (Brachet *et al.*, 1992). It was observed that, after an early transient period, the width of the analyticity strip of the velocity field decayed exponentially in time. In this contribution we present

2

simulations performed with up to  $2048^3$  collocation points; no indication of finite-time real singularity is found.

The second regime of the spectrally truncated Euler flow is obtained by carrying out the integration beyond the time at which the truncated equations cease to approximate the original Euler equations. It is well known (Kraichnan, 1973; Orszag, 1977) that the (spectrally) truncated Euler equations admit statistically stationary exact solutions, the so-called absolute equilibria, with Gaussian distribution  $f^*$  and energy spectra  $E(k)$  proportional to  $k^2$ . The dynamics of spectrally truncated time reversible nonlinear equations has already been studied in the particular cases of 1-D Burgers-Hopf models (Majda & Timofeyev, 2000) and 2-D quasi-geostrophic flows (Majda & Abramov, 2003). A central point in these studies was the nature of the statistical equilibrium that is achieved at large times (Orszag, 1977). Several equilibria are *a priori* possible because both (truncated) 1-D Burgers-Hopf and 2-D quasi-geostrophic flow models admit, besides the energy, a number of additional conserved quantities. The case of spectrally truncated 3-D incompressible Euler flows is of a different nature because (except for helicity that identically vanishes for the flows considered here) there is no known additional conserved quantity (Frisch, 1995). The equilibrium is thus unique. In this contribution we present simulations displaying Kolmogorov-like turbulence during an intermediate regime of the spontaneous relaxation toward this equilibrium.

This article is organized as follows: Section 2 is a short review of (standard) basic definitions and numerical algorithms. The singularity problem is addressed in Section 3 and the turbulent regime is presented in Section 4. Finally Section 5 is our conclusion.

## 2. Definition of the system

The three-dimensional incompressible Euler equations,

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

with  $(2\pi)$ -periodic initial data are solved numerically using standard (Gottlieb & Orszag, 1977) pseudo-spectral methods with resolution  $N$ . Time marching is done with a second-order leapfrog finite-difference scheme. Fourth-order Runge-Kutta method is used to start the leapfrog and to periodically couple even and odd time steps. The solutions are dealiased by suppressing, at each time step, the modes for which at least one wave-vector component exceeds two-thirds of the maximum wavenumber  $N/2$  (thus a  $1024^3$  run is truncated at  $k_{\max} = 341$ ). Symmetries are used in a standard way (Brachet *et al.*, 1983) to reduce memory storage and speed up computations.

The computations are carried out using the (incompressible) Taylor-Green vortex (Taylor & Green, 1937) single-mode initial conditions,

$$u^{\text{TG}} = \sin(x) \cos(y) \cos(z), \quad v^{\text{TG}} = -u^{\text{TG}}(y, -x, z), \quad w^{\text{TG}} = 0. \quad (3)$$

Series of runs are made by varying the resolution  $N$ .

In order to monitor the time-evolution of the flows we periodically extract from the computation the energy spectrum, defined by averaging  $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}', t)$  (the spatial Fourier transform of the solution to Eq. (1)) on spherical shells of width  $\Delta k = 1$ ,

$$E(k, t) = \frac{1}{2} \sum_{k-\Delta k/2 < |\mathbf{k}'| < k+\Delta k/2} |\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}', t)|^2. \quad (4)$$

## 3. Initial dynamics of complex singularities

When the velocity field is analytic, the energy spectrum  $E(k, t)$  decays exponentially at large  $k$  (with a possible algebraic prefactor). The logarithmic decrement is twice the width  $\delta(t)$  of the analyticity strip of

the solution continued to complex spatial variables. The basic idea of the analyticity strip method (Sulem *et al.*, 1983) is to trace the temporal behavior of  $\delta(t)$  in order to obtain evidence for or against blowup.

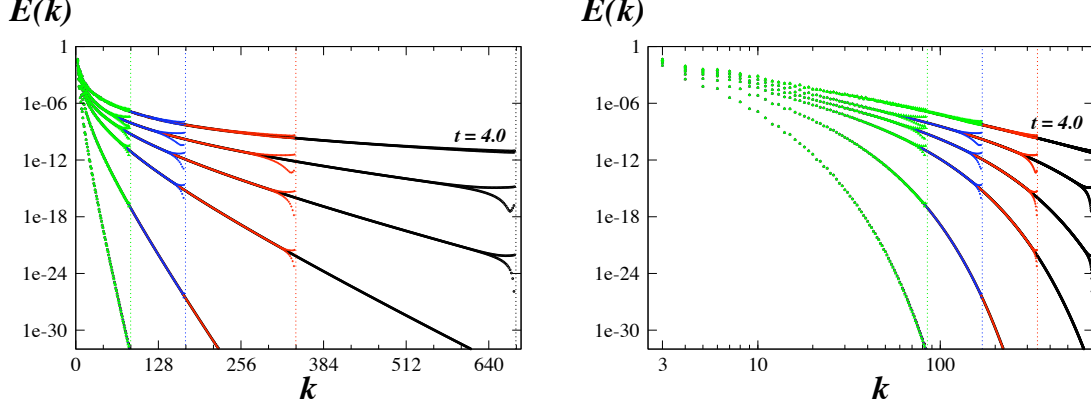


Figure 1. Energy spectra at  $t = (1.3, 1.9, 2.5, 2.9, 3.4, 4.0)$  and resolutions  $256^3$ ,  $512^3$ ,  $1024^3$  and  $2048^3$ ; the spectral cut-off is indicated, for each resolution, by the vertical dotted-lines. Left: Lin-Log, right: Log-Log.

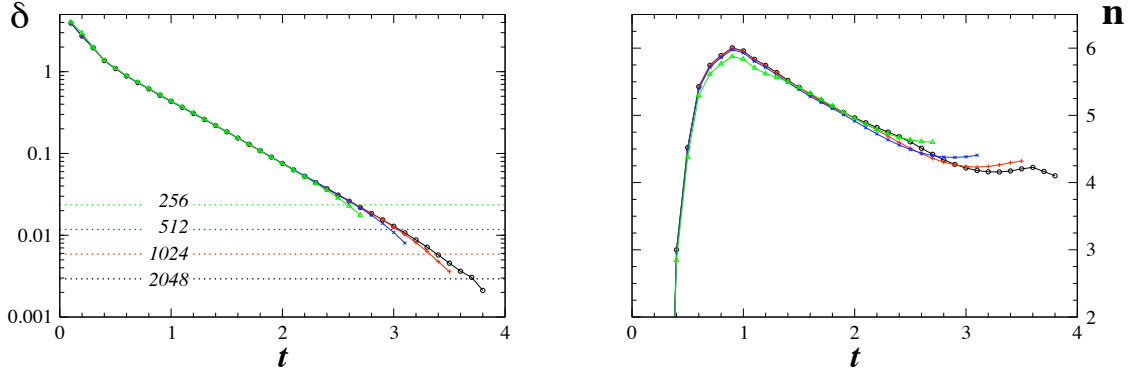


Figure 2. Time evolution of decrement  $\delta$  (left) and exponent  $n$  (right) for TG flow at various resolutions (see Eq. 5). Fits are performed within the intervals  $k = 5$  to  $\min(k_R, N/3)$ , where  $k_R = \min_{E(k) < 10^{-32}}(k)$  marks the beginning of roundoff noise at short times ( $t \leq 2.6$ , see Fig. 1).

In order to extract  $\delta(t)$  from the numerical integrations a least-square fit is performed on the logarithm of the computed energy spectrum, using the functional form,

$$\text{Log}(E(k, t)) = C - n\text{Log}(k) - 2\delta k. \quad (5)$$

The error on the fit interval  $k_1 \leq k \leq k_2$ ,

$$\chi^2 = \sum_{k_1 \leq k_i \leq k_2} (\text{Log}(E(k_i, t)) - (C - n\text{Log}(k_i) - 2\delta k_i))^2 \quad (6)$$

is minimized by solving the equations  $\partial\chi^2/\partial C = 0$ ,  $\partial\chi^2/\partial n = 0$  and  $\partial\chi^2/\partial\delta = 0$ . Note that these equations are linear in the fit parameters  $C$ ,  $n$  and  $\delta$ .

4

Examples of energy spectra to be fitted in such a way are presented on Fig. 1. It is apparent on the figure that resolution-dependent spectral even-odd oscillations are present, at certain times, on the TG energy spectrum. Note that this behavior is produced by the round-off error  $\sim 10^{-15}$ . For a given precision and resolution, the maximum time up to which the simulation is reliable should be the first instance at which the value of the spectrum at the highest wavenumber becomes comparable to the square of the round-off error. However, these round-off errors only affect the highest wavenumbers of the TG energy spectrum. They are eliminated by averaging the TG spectrum on shells of width  $\Delta k = 2$  before performing the fit (Brachet *et al.*, 1983).

The measure of  $\delta(t)$  is reliable as long as it remains larger than a few mesh sizes, a condition required for the smallest scales to be accurately resolved and spectral convergence ensured. Thus only the fits giving a value of  $\delta$  such that  $\delta k_{\max} > 2$  will be considered. Fig. 2 displays the values of  $\delta$  and  $n$  for the flow. It is visible that, after a short transient period,  $\delta(t)$  decays like

$$\delta(t) = \delta_0^{\text{TG}} e^{-t/T_{\text{TG}}} \quad (7)$$

with a characteristic decay time  $T_{\text{TG}} = 0.56$  and  $\delta_0^{\text{TG}} = 2.70$ , up to a time  $t = 3.7$  at resolution  $2048^3$  when it becomes comparable to twice the smallest resolved scale.

#### 4. Subsequent turbulent behavior

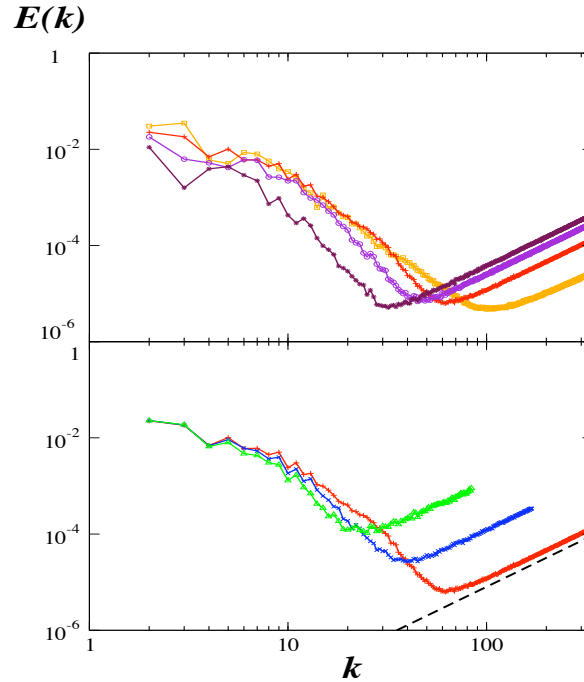


Figure 3. Energy spectra, top: resolution  $1024^3$  at  $t = (6.5, 8, 10, 14)$  ( $\diamond, +, \circ, *$ ); bottom: resolutions  $256^3$  (triangle  $\triangle$ ),  $512^3$  (cross  $\times$ ) and  $1024^3$  (cross  $+$ ) at  $t = 8$ , the dashed line indicates  $k^2$  scaling.

1

To rephrase the conclusion of the preceding section, for times larger than  $t = 3.7$  the solution to the  $2048^3$  spectrally truncated equations becomes sensitive to the spectral cutoff and therefore stops approximating the

solution to the full (untruncated) Euler equations. The numerical integration can nevertheless be continued; however, it is not clear what physical system (if any) the truncated equations represent in this regime.

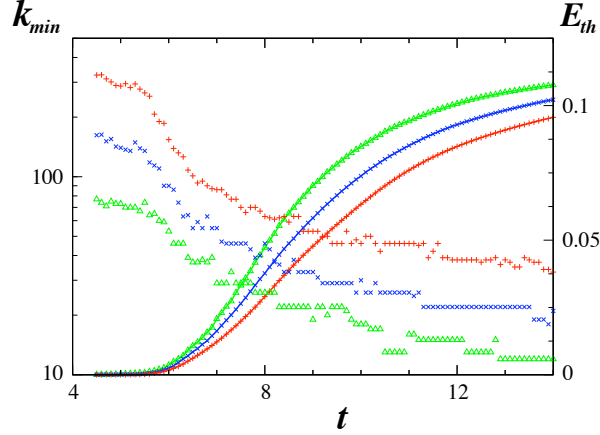


Figure 4. Time evolution of  $k_{\min}$  (left vertical axis) and  $E_{\text{th}}$  (right vertical axis) at resolutions  $256^3$  (triangle  $\triangle$ ),  $512^3$  (cross  $\times$ ) and  $1024^3$  (cross  $+$ ).

The first effect of the spectral truncation is to accumulate energy near the cutoff and the spectrum stops being decreasing at high- $k$ . Shortly after this crisis, the high- $k$  spectrum becomes proportional to  $k^2$  and this region then spreads to lower wavenumbers.

As already mentioned in the introduction, it is well known (Kraichnan, 1973; Orszag, 1977) that the spectrally truncated Euler equations (1), (2) admit statistically stationary exact solutions, the so-called absolute equilibria, with Gaussian distribution and energy spectra proportional to  $k^2$ . It thus appears that the truncated 3-D Eulerian dynamics is relaxing toward that equilibrium.

Figure 3 displays the time evolution (top) and resolution dependence (bottom) of the energy spectra at later times. It is apparent that a wavenumber  $k_{\min}$  (such that  $E(k) \geq E(k_{\min})$ ) spontaneously appears in the flow. The modes with  $k > k_{\min}$  appear to be in absolute equilibrium (see the dashed line at the bottom of the figure). Defining the thermalized (or dissipated) energy  $E_{\text{th}}$  by

$$E_{\text{th}}(t) = \sum_{k_{\min} < k} E(k, t), \quad (8)$$

the time evolutions of  $k_{\min}$  and  $E_{\text{th}}$  are presented on Fig. 4. It is apparent on the figure that, for all resolutions,  $k_{\min}$  decreases and  $E_{\text{th}}$  increases with time and that, for all times,  $k_{\min}$  increases and  $E_{\text{th}}$  decreases with the resolution.

A first hint for Kolmogorov behavior is given by the energy dissipation rate,

$$\varepsilon(t) = \frac{dE_{\text{th}}(t)}{dt}. \quad (9)$$

Indeed, perhaps one of the main quantitative results of this paper is the excellent agreement of the energy dissipation rate shown on Fig. 5 (top) with the corresponding data in the viscous TG flow (see Fig. 7 in (Brachet *et al.*, 1983) and Fig. 5.12 in (Frisch, 1995)). Both the time for maximum energy dissipation  $t_{\max} \simeq 8$  and the value of the dissipation rate at that time  $\varepsilon(t_{\max}) \simeq 1.5 \cdot 10^{-2}$  are in quantitative agreement.

A confirmation for Kolmogorov behavior around  $t_{\max}$  is displayed on Fig. 5 (bottom). The value of the inertial-range exponent  $n$ , obtained by a low- $k$  least square fit of the log of the energy spectrum with the

6

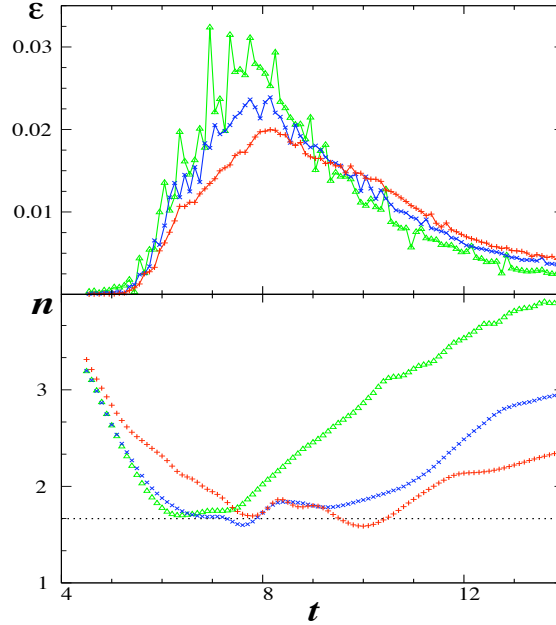


Figure 5. Temporal evolution of, top: energy dissipation  $\varepsilon$ ; bottom:  $k^{-n}$  inertial range prefactor  $n$  at resolutions  $256^3$  (triangle  $\triangle$ ),  $512^3$  (cross  $\times$ ) and  $1024^3$  (cross  $+$ ).

function cte.  $-n \log(k)$ , is close to  $5/3$  (horizontal dashed line) when  $t \simeq t_{\max}$ . Assuming Kolmogorov scaling  $E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$  in the  $k < k_{\min}$  range and absolute equilibrium  $E(k) \sim 3k^2 E_{\text{th}}/k_{\max}^3$  in the  $k > k_{\min}$  range, one obtains (Cichowlas *et al.*, 2005) a first estimation  $k_m$  for the observed wavenumber  $k_{\min}$ ,

$$k_m \sim \left( \frac{\varepsilon}{E_{\text{th}}^{3/2}} \right)^{2/11} k_{\max}^{9/11}. \quad (10)$$

The ratio  $k_{\min}/k_m$  is displayed on Fig. 6. It is seen to be reasonably constant on the figure.

## 5. Discussion and conclusion

In summary, complex singularities in DNS (resolutions up to  $2048^3$ ) of Taylor Green flow have been traced with the analyticity strip method. Note that the so called Kida-Pelz flow Kida (1985); Pelz (2001) has also been investigated in this way by Cichowlas & Brachet (2005) using a generalized energy spectra fit procedure needed to take into account oscillations caused by interferences between complex singularities. Using resolutions up to  $2048^3$ , exponential-in-time decay of  $\delta$  was also found for this flow.

Considering the truncated equations as a dynamical system in its own right, even when its solutions do not approximate solutions to the original Euler equations, we have observed the emergence of Kolmogorov-like turbulence during an intermediate regime of the spontaneous relaxation towards absolute equilibrium. Scaling laws have also been obtained for the dissipative effects that spontaneously appear in this time-reversible system. Let us finally remark that the temporal fluctuations around the equilibria are related to the equilibrium correlation functions by a fluctuation dissipation theorem. This point was used by Cichowlas *et al.* (2004), together with Monte-Carlo simulations, to estimate the magnitude of the dissipative effects.

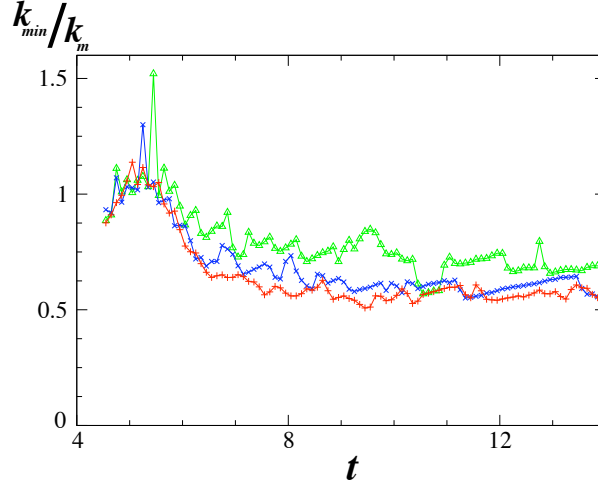


Figure 6. Time evolution of the ratio  $k_{\min}/k_m$  at resolutions  $256^3$  (triangle  $\Delta$ ),  $512^3$  (cross  $\times$ ) and  $1024^3$  (cross  $+$ ).

## Acknowledgments

We acknowledge constructive discussions with U. Frisch and Y. Pomeau. The computations were carried out on the NEC-SX5 computer of the Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique (IDRIS) of the Centre National pour la Recherche Scientifique (CNRS).



## Bibliography

- BRACHET, M. E., MEIRON, D. I., ORSZAG, S. A., NICKEL, B. G., MORF, R. H. & FRISCH, U. 1983 Small-scale structure of the taylor-green vortex. *J. Fluid Mech.* **130**, 411–452.
- BRACHET, M. E., MENEGUZZI, M., VINCENT, A., POLITANO, H. & SULEM, P. L. 1992 Numerical evidence of smooth self-similar dynamics for three-dimensional ideal flows. *Phys. of Fluids A* **4**, 2845–2854.
- CICHOWLAS, C., BONAÏTI, P., DEBBASCH, F. & BRACHET, M. 2004 Kolmogorov scaling in truncated 3-d euler flows. <http://arxiv.org/abs/nlin.CD/0410064> .
- CICHOWLAS, C., BONAÏTI, P., DEBBASCH, F. & BRACHET, M. 2005 Kolmogorov scaling and thermal relaxation in spectrally-truncated incompressible euler equations. (*In preparation*) .
- CICHOWLAS, C. & BRACHET, M. 2005 Evolution of complex singularities in kida-pelz and taylor-green inviscid flows. *Fluid Dyn. Res.* (*in press*) .
- FRISCH, U. 1995 *Turbulence, the legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- FRISCH, U., MATSUMOTO, T. & BEC, J. 2003 Singularities of euler flow? not out of the blue! *J. Stat. Phys.* **113** (5-6), 761,781.
- GOTTLIEB, D. & ORSZAG, S. A. 1977 *Numerical Analysis of Spectral Methods*. Philadelphia: SIAM.
- KIDA, S. 1985 Three-dimensional periodic flows with high symmetry. *J. Phys. Soc. Japan* **54**, 2132–2136.
- KRAICHNAN, R. 1973 Helical turbulence and absolute equilibrium. *J. Fluid Mech.* **59**, 745–752.
- MAJDA, A. & ABRAMOV, R. 2003 Statistically relevant conserved quantities for truncated quasi-geostrophic flow. *Proc. Natl. Acad. Sci.* **100**, 3841–3846.
- MAJDA, A. & TIMOFEYEV, I. 2000 Remarkable statistical behavior for truncated burgers-hopf dynamics. *Proc. Natl. Acad. Sci.* **97**, 12413–12417.
- ORSZAG, S. 1977 *Statistical Theory of Turbulence*. in, Les Houches 1973: Fluid dynamics, R. Balian and J.L. Peube eds. Gordon and Breach, New York.
- PELZ, R. B. 2001 Symmetry and the hydrodynamic blowup problem. *J. Fluid Mech.* **444**, 343–382.
- SULEM, C., SULEM, P. L. & FRISCH, H. 1983 Tracing complex singularities with spectral methods. *Journal of Computational Physics* **50**, 138–161.
- TAYLOR, G. I. & GREEN, A. E. 1937 Mechanism of the production of small eddies from large ones. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **158**, 499–521.

## Effective Dissipation and Turbulence in Spectrally Truncated Euler Flows

Cyril Cichowlas,<sup>1</sup> Pauline Bonaïti,<sup>1</sup> Fabrice Debbasch,<sup>2</sup> and Marc Brachet<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Laboratoire de Physique Statistique de l'Ecole Normale Supérieure, associé au CNRS et aux Universités, Paris VI et VII, 24 Rue Lhomond, 75231 Paris, France*

<sup>2</sup>*ERGA, CNRS UMR 8112, 4 Place Jussieu, F-75231 Paris Cedex 05, France*

(Received 21 October 2004; published 22 December 2005)

A new transient regime in the relaxation towards absolute equilibrium of the conservative and time-reversible 3D Euler equation with a high-wave-number spectral truncation is characterized. Large-scale dissipative effects, caused by the thermalized modes that spontaneously appear between a transition wave number and the maximum wave number, are calculated using fluctuation dissipation relations. The large-scale dynamics is found to be similar to that of high-Reynolds number Navier-Stokes equations and thus obeys (at least approximately) Kolmogorov scaling.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.264502

PACS numbers: 47.27.Eq, 05.20.Jj, 83.60.Df

Turbulence has been observed in inviscid and conservative systems, in the context of (compressible) low-temperature superfluid turbulence [1–3]. This behavior has also been reproduced using simple (incompressible) Biot-Savart vortex methods, which amount to Eulerian dynamics with *ad hoc* vortex reconnection [4]. The purpose of this Letter is to study the dynamics of spectrally truncated 3D incompressible Euler flows. Our main result is that the inviscid and conservative Euler equation, with a high-wave number spectral truncation, has long-lasting transients that behave just as those of the dissipative (with generalized dissipation) Navier-Stokes equation. This is so because the thermalized modes between some transition wave number and the maximum wave number can act as a fictitious microworld providing an effective viscosity to the modes with wave numbers below the transition wave number.

We thus study general solutions to the finite system of ordinary differential equations for the complex variables  $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k})$  [ $\mathbf{k}$  is a 3D vector of relative integers ( $k_1, k_2, k_3$ ) satisfying  $\sup_\alpha |k_\alpha| \leq k_{\max}$ ]

$$\partial_t \hat{v}_\alpha(\mathbf{k}, t) = -\frac{i}{2} \mathcal{P}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{p}} \hat{v}_\beta(\mathbf{p}, t) \hat{v}_\gamma(\mathbf{k} - \mathbf{p}, t), \quad (1)$$

where  $\mathcal{P}_{\alpha\beta\gamma} = k_\beta P_{\alpha\gamma} + k_\gamma P_{\alpha\beta}$  with  $P_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta / k^2$  and the convolution in (1) is truncated to  $\sup_\alpha |k_\alpha| \leq k_{\max}$ ,  $\sup_\alpha |p_\alpha| \leq k_{\max}$ , and  $\sup_\alpha |k_\alpha - p_\alpha| \leq k_{\max}$ .

This system is time reversible and exactly conserves the kinetic energy  $E = \sum_{\mathbf{k}} E(k, t)$ , where the energy spectrum  $E(k, t)$  is defined by averaging  $\mathbf{v}$  on spherical shells of width  $\Delta k = 1$ ,

$$E(k, t) = \frac{1}{2} \sum_{k-\Delta k/2 < |\mathbf{k}'| < k+\Delta k/2} |\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}', t)|^2. \quad (2)$$

The discrete Eq. (1) is classically obtained [5] by performing a Galerkin truncation [ $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}) = 0$  for  $\sup_\alpha |k_\alpha| \leq k_{\max}$ ] on the Fourier transform  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$  of a spatially periodic velocity field obeying the (unit density)

three-dimensional incompressible Euler equations,

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3)$$

The short-time, spectrally converged truncated Eulerian dynamics (1) has been studied [6,7] to obtain numerical evidence for or against blowup of the original (untruncated) Euler Eq. (3). We study here the behavior of solutions of (1) when spectral convergence to solutions of (3) is lost. Long-time truncated Eulerian dynamics is relevant to the limitations of standard simulations of high-Reynolds number (small viscosity) turbulence that are performed using Galerkin truncations of the Navier-Stokes equation [8].

Equation (1) is solved numerically using standard [9] pseudospectral methods with resolution  $N$ . The solutions are dealiased by spectrally truncating the modes for which at least one wave-vector component exceeds  $N/3$  (thus a  $1600^3$  run is truncated at  $k_{\max} = 534$ ). This method allows the exact evaluation of the Galerkin convolution in (1) in only  $N^3 \log N$  operations. Time marching is done with a second-order leapfrog finite-difference scheme, even and odd time steps are periodically recoupled using fourth-order Runge-Kutta.

To study the dynamics of (1), we use the so-called Taylor-Green [10] single-mode initial condition of (3)  $u^{\text{TG}} = \sin x \cos y \cos z$ ,  $v^{\text{TG}} = -u^{\text{TG}}(y, -x, z)$ ,  $w^{\text{TG}} = 0$ . Symmetries are employed in a standard way [11] to reduce memory storage and speed up computations. Runs were made with  $N = 256, 512, 1024$ , and  $1600$ .

Figure 1 displays the time evolution (top) and resolution dependence (bottom) of the energy spectra. Each energy spectrum  $E(k, t)$  admits a minimum at  $k = k_{\text{th}}(t) < k_{\max}$ , in sharp contrast with the short-time ( $t \leq 4$ ) spectrally converged Eulerian dynamics (data not shown, see [7,11]). For  $k > k_{\text{th}}(t)$  the energy spectrum obeys the scaling law  $E(k, t) = c(t)k^2$  (see the dashed line at the bottom of the figure). The dynamics thus spontaneously generates a scale separation at wave number  $k_{\text{th}}(t)$ . Figure 1 also shows that  $k_{\text{th}}$  slowly decreases with time. For fixed  $k$  inside the  $k^2$

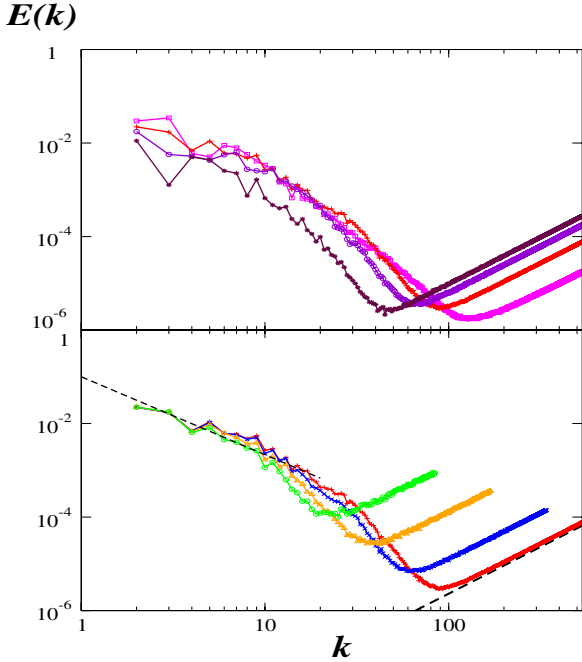


FIG. 1 (color online). Energy spectra. Top: resolution  $1600^3$  at  $t = (6.5, 8, 10, 14)$  ( $\diamond, +, \circ, *$ ); bottom: resolutions  $256^3$  (circle  $\circ$ ),  $512^3$  (triangle  $\triangle$ ),  $1024^3$  (cross  $\times$ ), and  $1600^3$  (cross  $+$ ) at  $t = 8$ . The dashed lines indicate  $k^{-5/3}$  and  $k^2$  scalings.

scaling zone  $E(k, t)$  increases with time but  $E(k, t)$  decreases with time for  $k$  close (but inferior) to  $k_{th}(t)$ .

The traditionally expected [5,12] asymptotic dynamics of the system is to reach an absolute equilibrium, which is a statistically stationary exact solution of the truncated Euler equations, with energy spectrum  $E(k) = ck^2$ . Our new results (see Fig. 1) show that a time-dependent statistical equilibrium appears long before the system reaches its stationary state. Indeed, the early appearance of a  $k^2$  zone is the key factor in the relaxation of the system towards the absolute equilibrium: as time increases, more and more modes gather into a time-dependent statistical equilibrium, which itself tends towards an absolute equilibrium.

Since the total energy  $E$  is constant, the energy dissipated from large scales into the time-dependent statistical equilibrium is given by

$$E_{th}(t) = \sum_{k_{th}(t) < k} E(k, t). \quad (4)$$

The time evolutions of  $k_{th}$  and  $E_{th}$  are presented in Fig. 2. The figure clearly displays the long transient during which, for all resolutions,  $k_{th}$  decreases and  $E_{th}$  increases with time. Note that, at all times,  $k_{th}$  increases and  $E_{th}$  decreases with the resolution.

Since the energy of the time-dependent equilibrium increases with time, the modes outside the equilibrium

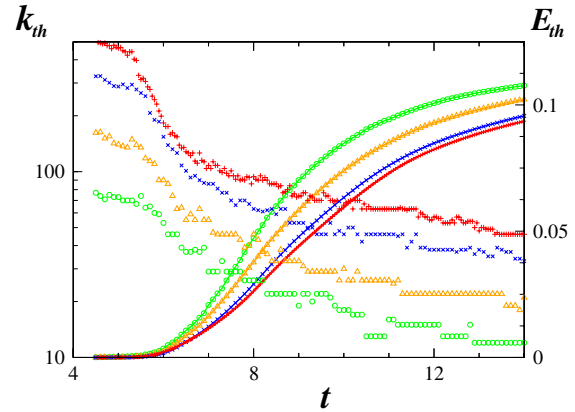


FIG. 2 (color online). Time evolution of  $k_{th}$  (left vertical axis) and  $E_{th}$  (right vertical axis) at resolutions  $256^3$  (circle  $\circ$ ),  $512^3$  (triangle  $\triangle$ ),  $1024^3$  (cross  $\times$ ), and  $1600^3$  (cross  $+$ ).

lose energy. The presence of a time-dependent equilibrium thus induces an effective dissipation on the lower  $k$  modes.

We now estimate the characteristic time of effective dissipation  $\tau(k_d)$  of modes  $k_d$  close to  $k_{th}(t)$  by assuming time-scale separation and studying, at each time  $t$ , the relaxation towards the *time-independent* absolute equilibrium characterized by  $E_{th}(t)$  and  $k_{max}$ . The existence of a fluctuation dissipation theorem (FDT) [13,14] ensures that dissipation around the equilibrium has the same characteristic time scale as the equilibrium correlation functions  $\langle \hat{v}_\alpha(\mathbf{k}, t) \hat{v}_\beta(\mathbf{k}', 0) \rangle$  [brackets denote equilibrium statistical averaging over initial conditions  $\hat{v}_\beta(\mathbf{k}', 0)$ ]. Defining this time scale  $\tau_C$  as the parabolic decorrelation time

$$\tau_C^2 \partial_{tt} \langle \hat{v}_\alpha(\mathbf{k}, t) \hat{v}_\beta(\mathbf{k}', 0) \rangle|_{t=0} = \langle \hat{v}_\alpha(\mathbf{k}, 0) \hat{v}_\beta(\mathbf{k}', 0) \rangle, \quad (5)$$

time translation invariance allows one to express the second-order time derivative as  $-\langle \partial_t \hat{v}_\alpha(\mathbf{k}, t) \times \partial_{t'} \hat{v}_\beta(\mathbf{k}', t') \rangle|_{t=t'=0}$ . Using expression (1) for the time derivatives reduces the evaluation of  $\tau_C$  to that of an equal-time fourth-order moment of a Gaussian field with correlation  $\langle \hat{v}_\alpha(\mathbf{k}, t) \hat{v}_\beta(-\mathbf{k}, t) \rangle = AP_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$  [5] where  $A = E_{th}/(2k_{max})^3$ . The only nonvanishing contribution is a one loop graph [8,15]. The correlation time  $\tau_C$  associated with wave number  $k$  is found in this way [14] to obey the simple scaling law

$$\tau_C = \frac{C}{k\sqrt{E_{th}}}, \quad (6)$$

where  $C = 1.43382$  is a constant of order unity. The time scale  $\tau_C$  is the eddy turnover time at wave number  $k_{th}$ . Because of Kolmogorov (K41) behavior (see below) the evolution of  $E_{th}$  is governed by the large-eddy turnover time. The assumption of time-scale separation made above is thus consistent.

This strongly suggests the introduction of an effective generalized Navier-Stokes model for the dissipative dy-

namics of modes  $k$  close to  $k_{\text{th}}(t)$ . To wit, we make the ansatz  $\varepsilon(k, t) = \bar{\nu}|k|E(k, t)$ , where  $\bar{\nu} = \sqrt{E_{\text{th}}}/C$  and  $\varepsilon(k, t) = -\partial E(k, t)/\partial t$  is the spectral density of energy dissipation

$$\varepsilon(t) = \frac{dE_{\text{th}}(t)}{dt}. \quad (7)$$

Assuming that this dissipation takes place in a range of width  $\alpha k_d$  around  $k_d$ , we estimate the total dissipation  $\varepsilon \sim \bar{\nu} k_d E(k_d) \alpha k_d$ . This, together with  $E(k_d) \sim k_d^2 E_{\text{th}}/k_{\text{max}}^3$  yields the relation

$$k_d \sim \left( \frac{\varepsilon}{E_{\text{th}}^{3/2}} \right)^{1/4} k_{\text{max}}^{3/4}. \quad (8)$$

The consistency of this estimation of effective dissipation with the results displayed in Fig. 2 requires that  $k_d \sim k_{\text{th}}$ . The ratio  $k_{\text{th}}/k_d$  is displayed in Fig. 3. It is seen to be of order unity and is reasonably constant in time and resolution independent (at least for  $N > 256$ ).

Thus the small-scale modes between  $k_{\text{th}}$  and  $k_{\text{max}}$  act as a fictitious thermostat providing, via the FDT, an effective viscosity to the large-scale modes with wave numbers below  $k_{\text{th}}$ . Note that spontaneous equilibration happening in conservative isolated systems, such as the one studied in this Letter, should not be confused with equilibration resulting from interaction with the thermalized degrees of freedom of the molecules constituting a physical fluid. Indeed, the reversible dynamics of the isolated system (1) spontaneously generates both the wave number at which the fictitious thermostat begins and its temperature.

The previous results indicate scale separation between conservative large-scale and dissipative small-scale dynamics. Furthermore, the scale separation increases with

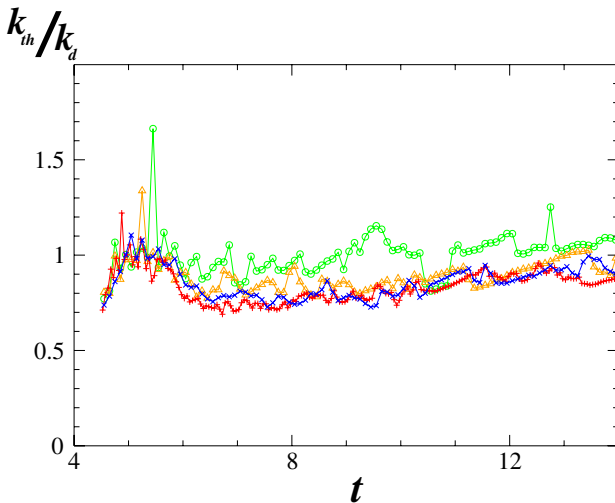


FIG. 3 (color online). Time evolution of the ratio  $k_{\text{th}}/k_d$  at resolutions  $256^3$  (circle  $\circ$ ),  $512^3$  (triangle  $\triangle$ ),  $1024^3$  (cross  $\times$ ), and  $1600^3$  (cross  $+$ ).

resolution. This strongly suggests that large-scale behavior may be identical to that of high-Reynolds number standard Navier-Stokes equations, which is known [8] to obey (at least approximately) K41 scaling.

The energy dissipation rate (7) shown on Fig. 4 (top, left axis) is in good agreement with the corresponding data for the Navier-Stokes Taylor-Green flow (see Ref. [11], Fig. 7, and Ref. [8], Fig. 5.12). Both the time for maximum energy dissipation  $t_{\text{max}} \approx 8$  and the value of the dissipation rate at that time  $\varepsilon(t_{\text{max}}) \approx 1.5 \times 10^{-2}$  are in quantitative agreement. Furthermore, the long-time quasilinear behavior of  $\varepsilon^{-1/3}$  (shown on the right axis) is compatible with K41 self-similar decay  $\varepsilon(t) \sim L_0^2 t^{-3}$ .

A confirmation for K41 behavior around  $t_{\text{max}}$  is displayed in Fig. 4 (bottom). The value of the inertial-range exponent  $n$ , obtained by low- $k$  least squares fits of the logarithm of the energy spectrum to the function  $c - n \log(k)$ , is close to  $5/3$  (horizontal dashed line) when  $t \approx t_{\text{max}}$ . The  $-5/3$  exponent is also shown as the left dashed line on the bottom of Fig. 1, where the dissipative effects can be traced back to the energy spectrum decreasing faster than  $k^{-5/3}$  at intermediate wave numbers.

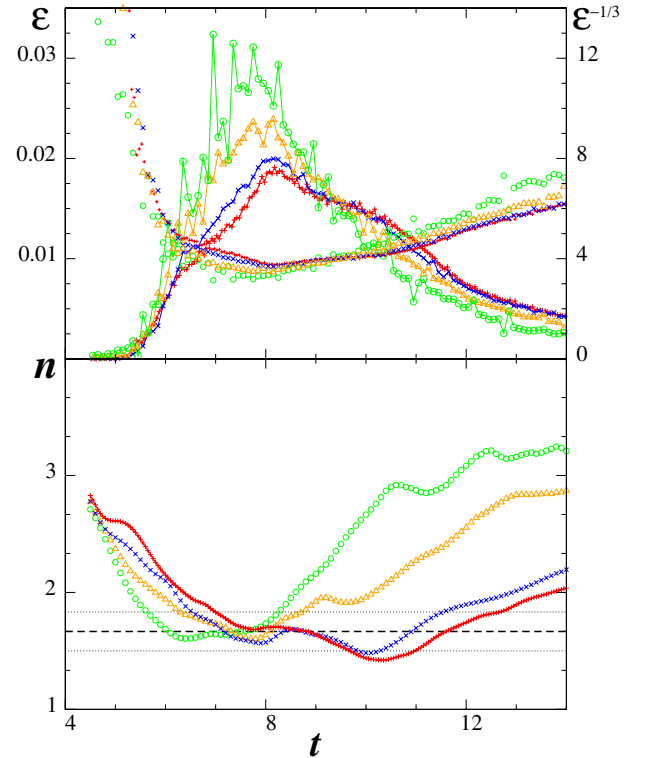


FIG. 4 (color online). Temporal evolution. Top: energy dissipation  $\varepsilon$  (left vertical axis) and  $\varepsilon^{-1/3}$  (right vertical axis); bottom:  $k^{-n}$  inertial-range exponent  $n$  at resolutions  $256^3$  (fit interval  $2 \leq k \leq 12$ , circle  $\circ$ ),  $512^3$ , (fit interval  $2 \leq k \leq 14$ , triangle  $\triangle$ ),  $1024^3$  (fit interval  $2 \leq k \leq 16$ , cross  $\times$ ), and  $1600^3$  (fit interval  $2 \leq k \leq 20$ , cross  $+$ ).

The mixed K41-absolute equilibrium spectra have already been discussed in the wave turbulence literature (e.g., [16]) and have more recently been studied in connection with the Leith model of hydrodynamic turbulence [17]. In this context, small-scale thermalization may have some bearing on the so-called bottleneck problem if the dissipation wave number approaches  $k_{\max}$ .

Note that the dynamics of spectrally truncated time-reversible nonlinear equations has also been investigated in the special cases of 1D Burgers-Hopf models [18] and 2D quasigeostrophic flows [19]. A central point in these studies was the nature of the statistical equilibrium that is achieved at large times. Several equilibria are *a priori* possible because both (truncated) 1D Burgers-Hopf and 2D quasigeostrophic flow models admit, besides the energy, a number of additional conserved quantities. The 3D Euler case is of a different nature because (except for helicity that identically vanishes for the flows considered here) there is no known additional conserved quantity [8] and the equilibrium is thus unique. The central problem in truncated 3D Eulerian dynamics is therefore the mechanism of relaxation towards equilibrium, as studied in this Letter.

In summary, our main result is that the spectrally truncated Euler equation has long-lasting transients behaving just like those of the dissipative Navier-Stokes equation. The small-scale thermalized modes act as a fictitious microworld providing an effective viscosity to the large-scale modes. These dissipative effects were estimated using a new exact result based on fluctuation dissipation relations. Furthermore, the solutions of the truncated Euler equations were shown to obey, at least approximately, K41 scaling. In this context, the spectrally truncated Euler equations appear as a minimal model of turbulence.

We acknowledge discussions with D. Bonn, U. Frisch, and Y. Pomeau. The computations were carried out on the NEC-SX5 computer of the Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique (IDRIS) of

the Centre National pour la Recherche Scientifique (CNRS).

- 
- [1] C. Nore, M. Abid, and M. E. Brachet, Phys. Rev. Lett. **78**, 3896 (1997).
  - [2] C. Nore, M. Abid, and M. Brachet, Phys. Fluids **9**, 2644 (1997).
  - [3] M. Abid, M. Brachet, J. Maurer, C. Nore, and P. Tabeling, Eur. J. Mech. B, Fluids **17**, 665 (1998).
  - [4] T. Araki, M. Tsubota, and S. K. Nemirovskii, Phys. Rev. Lett. **89**, 145301 (2002).
  - [5] S. A. Orszag, in *Fluid Dynamics*, Proceedings of the Les Houches Summer School 1973, edited by R. Balian and J. L. Peube (Gordon and Breach, New York, 1977).
  - [6] U. Frisch, T. Matsumoto, and J. Bec, J. Stat. Phys. **113**, 761 (2003).
  - [7] C. Cichowlas and M. E. Brachet, Fluid Dyn. Res. **36**, 239 (2005).
  - [8] U. Frisch, *Turbulence, the Legacy of A. N. Kolmogorov* (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1995).
  - [9] D. Gottlieb and S. A. Orszag, *Numerical Analysis of Spectral Methods* (SIAM, Philadelphia, 1977).
  - [10] G. I. Taylor and A. E. Green, Proc. R. Soc. A **158**, 499 (1937).
  - [11] M. E. Brachet, D. I. Meiron, S. A. Orszag, B. G. Nickel, R. H. Morf, and U. Frisch, J. Fluid Mech. **130**, 411 (1983).
  - [12] R. H. Kraichnan, J. Fluid Mech. **59**, 745 (1973).
  - [13] R. H. Kraichnan, Phys. Rev. **113**, 1181 (1959).
  - [14] C. Cichowlas, P. Bonaiti, F. Debbash, and M. E. Brachet (to be published).
  - [15] L. Isserlis, Biometrika **12**, 134 (1918).
  - [16] S. Dyachenko, A. C. Newell, A. Pushkarev, and V. E. Zakharov, Physica (Amsterdam) **57D**, 96 (1992).
  - [17] C. Connaughton and S. Nazarenko, Phys. Rev. Lett. **92**, 044501 (2004).
  - [18] A. J. Majda and I. Timofeyev, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **97**, 12 413 (2000).
  - [19] A. J. Majda and R. Abramov, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **100**, 3841 (2003).

# **Bibliographie**



# Bibliographie

- [1] D. Gottlieb and S. A. Orszag. *Numerical Analysis of Spectral Methods*. SIAM, Philadelphia, 1977.
- [2] S.A. Orszag. *Statistical Theory of Turbulence*. in, Les Houches 1973 : Fluid dynamics, R. Balian and J.L. Peube eds. Gordon and Breach, New York, 1977.
- [3] S.A. Orszag and G. S. Paterson. Numerical simulation of three dimensional homogeneous isotropic turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 28 :76–79, 1972.
- [4] E. D. Siggia. Numerical study of small-scale intermittency in three-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, 107 :375, 1981.
- [5] M. E. Brachet, D. I. Meiron, S. A. Orszag, B. G. Nickel, R. H. Morf, and U. Frisch. Small-scale structure of the taylor–green vortex. *J. Fluid Mech.*, 130 :411–452, 1983.
- [6] G. I. Taylor and A. E. Green. Mechanism of the production of small eddies from large ones. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 158 :499–521, 1937.
- [7] M. E. Brachet, M. Meneguzzi, A. Vincent, H. Politano, and P. L. Sulem. Numerical evidence of smooth self-similar dynamics for three-dimensional ideal flows. *Phys. of Fluids A*, 4 :2845–2854, 1992.
- [8] M.-E. Brachet. Direct simulation of three-dimensional turbulence in the taylor-green vortex. *Fluid Dynamics Research*, 8 :1–8, 1991.
- [9] M.-E. Brachet. Géométrie des structures à petite échelle dans le vortex de taylor-green. *C.R.A.S II*, 311 :775, 1990.
- [10] S. Douady, Y. Couder, and M.-E. Brachet. Direct observation of the intermittency of intense vorticity filaments in turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 67(8) :983–986, 1991.
- [11] S. Chen, G. Doolen, R. H. Kraichnan, and Z.-S. She. On the statistical correlations between the velocity increments and the local dissipation rate. *Phys. Fluid A*, 5 :458–463, 1993.
- [12] Z.-S. She, S. Chen, G. Doolen, R. H. Kraichnan, and S. A. Orszag. Reynolds number dependence of isotropic navier-stokes turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 70 :3251–3254, 1993.
- [13] M.A. Taylor and S. Kurien. Direct numerical simulations of turbulence - data generation and statistical analysis. *Los Alamos Science*, 29 :142–151, 2005.



- [14] M.A. Taylor, S. Kurien, and G.L. Eyink. Direct observation of the intermittency of intense vorticity filaments in turbulence. *Phys. Rev. E*, 68(2) :26310, 2003.
- [15] Y. Kaneda, T. Ishihara, M. Yokokawa, K. Itakura, and A. Uno. Energy dissipation rate and energy spectrum in high resolution direct numerical simulations of turbulence in a periodic box. *Phys. of Fluids*, 15 :121–124, 2003.
- [16] C. Fefferman. Existence and smoothness of the navier-stokes equations. [www.claymath.org/prizeproblems/navierstokes.htm](http://www.claymath.org/prizeproblems/navierstokes.htm), 2000.
- [17] C. Bardos, S. Benachour, and M. Zerner. Analyticité des solutions périodiques de l'équation d'euler en deux dimensions. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 282 A :995–998, 1976.
- [18] W. Wolibner. Un théorème sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long. *Math., Z* 37 :698–726, 1933.
- [19] E. Holder. Über die unbeschränkte fortsetzbarkeit einer stetigen ebenen bewegung in einer unbegrenzten inkompressiblen flussigkeit. *Math., Z* 37 :727–738, 1933.
- [20] J.T. Beale, T. Kato, and A.J. Majda. Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-d euler equations. *Commun. Math. Phys.*, 94 :61–66, 1985.
- [21] C. Goulaouic and M.S. Baouendi. Cauchy problem for analytic pseudo-differential operators. *Comm. Partial Diff. Eq.*, 1 :135–189, 1976.
- [22] S. Benachour. Analyticité des solutions de l'équation d'euler en trois dimensions. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 283 A :107–110, 1976.
- [23] C. Bardos and S. Benachour. Domaine d'analyticité des solutions de l'équation d'euler dans un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ . *Ann. Sci. Norm. Sup. Pisa*, 4 :647–687, 1977.
- [24] S. Benachour. Analyticity of solutions of euler equations. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 71 :271–299, 1979.
- [25] U. Frisch, T. Matsumoto, and J. Bec. Singularities of euler flow? not out of the blue! *J. Stat. Phys.*, 113(5-6) :761,781, 2003.
- [26] E. Hopf. Statistical hydrodynamics and functional calculus. *J. Ratl. Mech. Anal.*, 1 :87–123, 1952.
- [27] J.M. Burgers. Mathematical examples illustrating relations occuring in the theory of turbulent motion. *Kon. Ned. Akad. Wet. Verh.*, 17 :1–53, 1939.
- [28] R.H. Kraichnan. Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 10 :1417–1423, 1967.
- [29] A. N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds number. *C. R. Acad. Sci. U.S.S.R.*, 30 :9–13, 1941a.

- [30] A. N. Kolmogorov. On degeneration decay of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid. *C. R. Acad. Sci. U.S.S.R.*, 31 :538–540, 1941b.
- [31] A. N. Kolmogorov. Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. *C. R. Acad. Sci. U.S.S.R.*, 32 :16–18, 1941c.
- [32] U. Frisch. *Turbulence, the legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [33] C. Nore, M. Abid, and M. E. Brachet. Kolmogorov turbulence in low-temperature superflows. *Phys. Rev. Lett.*, 78(20) :3896–3899, 1997.
- [34] M. Abid, M. Brachet, J. Maurer, C. Nore, and P. Tabeling. Experimental and numerical investigations of low-temperature superfluid turbulence. *Eur. J. Mech. B Fluids*, 17(4) :665–675, 1998.
- [35] T. Araki, M. Tsubota, and S. K. Nemirovskii. Energy spectrum of superfluid turbulence with no normal-fluid component. *Phys. Rev. Lett.*, 89(14) :1–4, 2002.
- [36] S. Kida. Three-dimensional periodic flows with high symmetry. *J. Phys. Soc. Japan*, 54 :2132–2136, 1985.
- [37] C. Sulem, P. L. Sulem, and H. Frisch. Tracing complex singularities with spectral methods. *Journal of Computational Physics*, 50 (1) :138–161, 1983.
- [38] C. Cichowlas and M.-E. Brachet. Evolution of complex singularities in kida-pelz and taylor-green inviscid flows (*in press*). *Fluid Dyn. Res.*, 2005.
- [39] C. Cichowlas, F. Debbasch, and M.-E. Brachet. Evolution of complex singularities and Kolmogorov scaling in truncated 3-D Euler flows *dans "IUTAM Symposium on Elementary Vortices and Coherent Structures : Significance in Turbulence Dynamics"*. S. Kida, Springer, 2006.
- [40] C. Cichowlas, P. Bonaiti, F. Debbasch, and M.-E. Brachet. Effective dissipation and turbulence in spectrally truncated euler flows. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :264502, 2005.
- [41] R. B. Pelz. Symmetry and the hydrodynamic blowup problem. *J. Fluid Mech.*, 444 :343–382, 2001.
- [42] R. B. Pelz. Extended series analysis of full octahedral flow : numerical evidence for hydrodynamic blowup. *Fluid Dynamics Research*, 33 :207–221, 2003.
- [43] R. B. Pelz and Y. Gulak. Evidence for a real-time singularity in hydrodynamics from time series analysis. *Phys. Rev. Lett.*, 25 :4998–5001, 1997.
- [44] R. B. Pelz and Y. Gulak. Locally self-similar, finite-time collapse in a high-symmetry vortex-filament model. *Physical Review E*, 55 :1617–1626, 1997.

- [45] O. N. Boratav and R. B. Pelz. Evidence for a real-time singularity in hydrodynamics from time series analysis. *Phys. Rev. Lett.*, 79 :4998–5001, 1994.
- [46] O. N. Boratav and R. B. Pelz. Direct numerical simulation of transition to turbulence from a high-symmetry initial condition. *Phys. of Fluids*, 6 (8) :2757–2784, 1994.
- [47] R. M. Kerr. Evidence for a singularity of the three-dimensional incompressible Euler equations. *Phys. Fluids A*, 5 :1725–1746, 1993.
- [48] S. Kida. Study of complex singularities by filtered spectral method. *J. Phys. Soc. Japan*, 55 :1542–1555, 1986.
- [49] R.H. Kraichnan. Classical fluctuation-relaxation theorem. *Phys. Rev.*, 113(5) :1181,1182, 1959.
- [50] R. Kubo. Linear Response Theory of Irreversible Processes *dans "Statistical Mechanics of Equilibrium and Non-Equilibrium"*. J. Meixner, North-Holland, 1957.
- [51] A.J. Majda and I. Timofeyev. Remarkable statistical behavior for truncated Burgers-Hopf dynamics. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 97 :12413–12417, 2000.
- [52] A.J. Majda and R. Abramov. Statistically relevant conserved quantities for truncated quasi-geostrophic flow. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 100 :3841–3846, 2003.
- [53] L. Isserlis. On a formula for the product-moment coefficient in any number of variables. *Biometrika*, 12 :134–139, 1918.
- [54] R.H. Kraichnan. Helical turbulence and absolute equilibrium. *J. Fluid Mech.*, 59 :745–752, 1973.
- [55] D. Bonn. (*Private communication*), 2004.
- [56] M. E. Cates and S. J. Candau. Statics and dynamics of worm-like surfactant micelles. *J. Phys. : Condens. Matter*, 2(33) :6869–6892, 1990.
- [57] S.K. Park and K.W. Miller. Random number generators - good ones are hard to find. *Communications of the ACM*, 31 , 10 :1192–1201, 1988.



# Résumé

Dans ce travail de thèse, de nature théorique, nous intégrons numériquement l'équation d'Euler par des méthodes pseudo-spectrales qui conservent exactement l'énergie, ce qui permet usuellement d'étudier la dynamique des singularités complexes. L'étude de l'écoulement de Kida-Pelz nous a permis de mettre en évidence des interférences de singularités et d'étendre les méthodes d'analyse usuelles. Sorti de l'approximation d'un écoulement continu, la solution du système d'équations différentielles ordinaires tend vers un équilibre statistique, connu sous le nom d'équilibre absolu.

Nous avons étudié la relaxation du système vers l'équilibre absolu, exhibant une séparation spontanée d'échelles due à une thermalisation progressive de l'écoulement et ayant un effet pseudo-dissipatif sur les grandes échelles. L'étude analytique et numérique des temps propres de ces équilibres conduit à les caractériser par une loi d'échelle : celle-ci permet une estimation dissipative de la séparation spontanée d'échelle apparaissant lors de la relaxation, grâce à un théorème de Fluctuation-Dissipation. Enfin, on montre que le comportement des grandes échelles est compatible avec une turbulence à la Kolmogorov.

**Mots-clés :** Équation d'Euler – Singularité – Troncature spectrale – Équilibre absolu – Fluctuation-Dissipation – Séparation d'échelles – Relaxation – Turbulence

# Abstract

This theoretical work presents numerical simulations of Euler equation by spectral methods that conserves energy and usually enables to study complex singularities dynamic. The study of Kida-Pelz flow enables to point out interferences of complex singularities and to extend usual analysis methods. Approximation of a continuous flow by ordinary differential equations leads to a validity limit of temporal integration. Beyond, the system converges to a statistical equilibrium, known as absolute equilibrium.

The study of relaxation to absolute equilibrium shows a spontaneous scale separation due to a progressive thermalisation of the flow, and a pseudo-dissipative effect on large scales. Studying characteristic time-scales of equilibrium, analytically and by Monte-Carlo simulations, leads to a scale law. A Fluctuation-Dissipation relation enables a dissipative estimation of the scale separation. The behavior of large scales is finally compatible with a Kolmogorov Turbulence.

**Key-words :** Euler equation – Singularity – Spectral truncation – Absolute equilibrium – Fluctuation-Dissipation – Scales separation – Relaxation – Turbulence